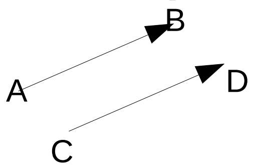
Les vecteurs

A - Vecteurs égaux

1- Définition

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même longueur, même direction et même sens. C'est pour cette raison qu'on représente les vecteurs par des flèches.



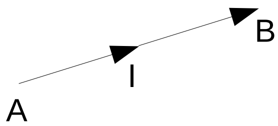
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, en effet ils ont :

- même longueur : $AB = CD$
- même direction : (AB) // (CD)
- même sens : le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D.

Attention
L'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ regroupe **trois** informations ; il faut donc que les **trois** propriétés soient vérifiées pour qu'elle ait lieu.

2- Vecteurs et milieu d'un segment

Considérons trois points A, I et B.

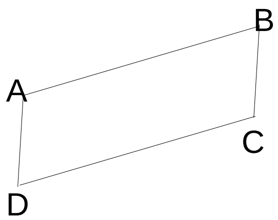


Le point I est le milieu du segment $[AB]$
si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

La propriété géométrique *I est le milieu du segment [AB]* et l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ sont donc équivalentes.

3- Vecteurs et parallélogrammes

Considérons quatre points A, B, C et D.



Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme
si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

La propriété géométrique *ABCD est un parallélogramme* et l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ sont donc équivalentes.

Attention
Il ne faut pas oublier de tenir compte du sens des vecteurs : pour le parallélogramme $ABCD$, l'égalité de vecteurs est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et non $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

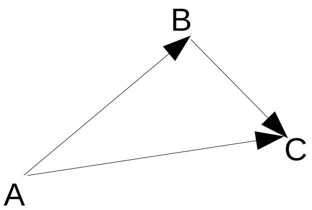
Remarque
Le parallélogramme $ABCD$ peut aussi être nommé $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $DCBA$, $CBAD$ ou $BACD$. Chaque façon de le nommer fournit une nouvelle égalité vectorielle; on a finalement les 4 égalités suivantes :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

Si l'une de ces 4 égalités est vérifiée, les 3 autres le sont aussi.

B - Somme de vecteurs

On peut définir une addition des vecteurs qui a des propriétés semblables à celles de l'addition des nombres.

1- Relation de Chasles

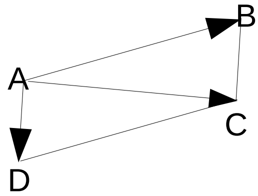


Quels que soient les points A, B et C : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Remarque
On peut interpréter la relation de Chasles de la façon suivante : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente un déplacement de A vers B et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ représente un déplacement de B vers C ; la somme de ces deux déplacements est un déplacement de A vers C qu'on représente par le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Attention
La relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (qui concerne des vecteurs) est vraie quels que soient les points A, B et C.
La relation $AB + BC = AC$ (qui concerne des distances) n'est vérifiée que si le point B est sur le segment $[AC]$; de manière générale on ne peut affirmer que $AB + BC \geqslant AC$.

2- Règle du parallélogramme



Quels que soient les points A, B, C et D :
On a l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
si et seulement si
$ABCD$ est un parallélogramme.

3- Propriétés de l'addition des vecteurs

L'addition des vecteurs a des propriétés semblables à celles de l'addition des nombres réels.

a) Suite d'additions de vecteurs

Lorsqu'on effectue une somme de plusieurs vecteurs, on peut modifier l'ordre des termes ou regrouper plusieurs termes sans modifier le résultat.

b) Vecteur nul

Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul; on le note $\vec{0}$. On ne modifie pas un vecteur en lui ajoutant le vecteur nul.

c) Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est égale au vecteur nul, ils ont alors même longueur et même direction mais des sens différents.

Ainsi, quels que soient les points A et B, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.
On écrit : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

d) Soustraction des vecteurs

Pour soustraire un vecteur il suffit d'ajouter son opposé.
Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

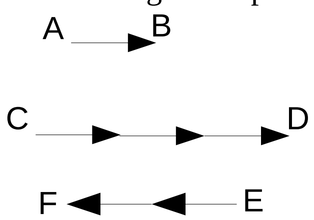
C - Multiplication d'un vecteur par un réel

1- Définition

Pour multiplier un vecteur par un nombre réel k:

- on conserve la direction du vecteur
- on multiplie la longueur du vecteur par $|k|$
- si k est positif, on conserve le sens du vecteur, mais si k est négatif on le change.

Exemples
Sur la figure on peut constater :



- $\overrightarrow{CD}=3\ \overrightarrow{AB}$ car (CD) // (AB), CD = 3AB et le sens de C vers D est le même que le sens de A vers B.
- $\overrightarrow{EF}=-2\ \overrightarrow{AB}$ car (EF) // (AB), EF = 2AB et le sens de E vers F est le sens inverse de celui allant de A vers B.
- Les deux égalités précédentes sont équivalentes à $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{EF}$

2- Propriétés

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, ainsi que deux nombres réels x et y.
Les égalités suivantes sont vérifiées :

- $x(y\overrightarrow{AB})=(xy)\overrightarrow{AB}$
- $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}=(x+y)\overrightarrow{AB}$
- $x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=x\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{CD}$

Ces propriétés montrent que le calcul vectoriel est très voisin du calcul sur les nombres.

3- Applications

On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en effectuant une multiplication par un réel. Ainsi deux vecteurs colinéaires ont même direction, le sens et la longueur pouvant être différents.

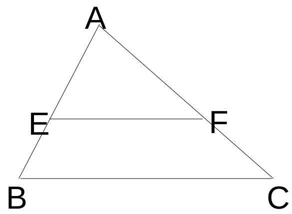
a) Droites parallèles

Soient A, B, C et D quatre points. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Ainsi, il suffit de trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) Points alignés

Soient *A*, *B* et *C* trois points. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points *A*, *B* et *C* sont alignés.
Ainsi, il suffit de trouver un nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ pour démontrer que les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

Exemple d'application



On considère un triangle *ABC*, ainsi que les points *E* et *F* définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
Démontrons que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles.

Pour démontrer que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles, nous allons montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ (utilisation de l'énoncé)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$ (propriété de la multiplication)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

L'égalité $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ montre que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles.