Variations des fonctions

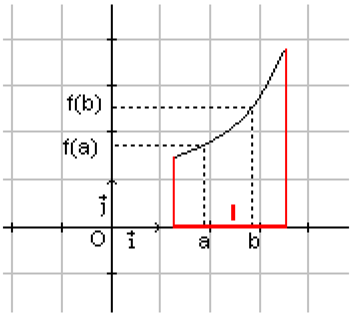
L'étude des variations d'une fonction consiste à déterminer les intervalles sur lesquels cette fonction est croissante ou décroissante. Le résultat de cette étude permet de construire un tableau de variations.

A - Sens de variations d'une fonction

1- Fonctions croissantes

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** des nombres.
Quels que soient les réels a et b de I, si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$.
Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f «monte» sur l'intervalle I.

Exemple

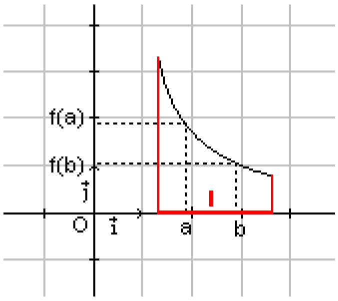


La fonction f est croissante sur I.
La courbe monte.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) augmentent aussi : f conserve l'ordre des nombres.

2- Fonctions décroissantes

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse** l'ordre des nombres.
Quels que soient les réels a et b de I, si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$.
Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f «descend» sur l'intervalle I.

Exemple

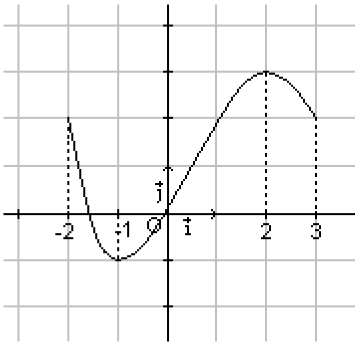


La fonction f est décroissante sur I.
La courbe descend.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) diminuent : f inverse l'ordre des nombres.

B - Tableau de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle D.
Pour construire le tableau des variations de la fonction f sur D on détermine les intervalles I contenus dans D sur lesquels f est monotone, c'est à dire soit croissante, soit décroissante.
On note les résultats obtenus dans un tableau où des flèches indiquent la croissance ou la décroissance de f.

Exemple
Considérons la fonction f définie sur [-2 ;3] dont la courbe représentative est dessinée.



On observe que :
- f est décroissante sur [-2; -1]
- f est croissante sur [1; 2]
- f est décroissante sur [2; 3]

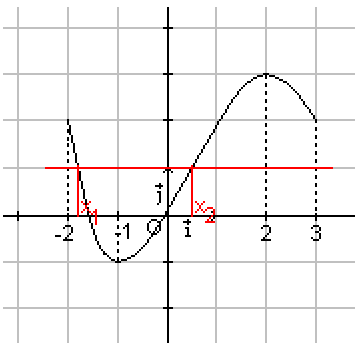
D'autre part f(-2)=2, f(-1)=-1, f(2)=3 et f(3)=2.

Tout ceci peut être résumé dans le tableau de variations suivant :

x	-2		-1		2		3
f(x)	2	↘	-1	↗	3	↘	2

C - Fonctions et équations

Considérons la fonction f définie sur [-2; 3] dont la courbe représentative et le tableau de variations sont donnés ci-dessous.
On se propose d'étudier l'équation f(x)=1.

<table>
<tr><th>Courbe</th><th>Tableau de variations de f</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>2</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>3</td><td>↘</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
</table>

Le tableau de variations de f nous montre que 3 intervalles doivent être considérés.
Sur [-2; -1], la fonction f est décroissante de 2 à -1, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle [-1; 2]; comme 1 est situé dans cet intervalle, on aura une solution x_1 de l'équation entre -2 et -1.
Sur [-1; 2], la fonction f est croissante de -1 à 3, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle [-1; 3]; comme 1 est situé dans cet intervalle, on aura une solution x_2 de l'équation entre -1 et 2.
Sur [2; 3], la fonction f est décroissante de 3 à 2, elle prend une seule fois toutes les valeurs de l'intervalle [2; 3]; mais 1 n'est pas situé dans cet intervalle, il n'y a donc pas de solution de l'équation entre 2 et 3.
Conclusion
L'équation f(x)=1 a deux solutions; une solution x_1 entre -2 et -1 et une solution x_2 entre -1 et 2.