Racine carrée

A- Définition

La racine carrée d'un réel positif x est le nombre positif noté $\sqrt{x}$ dont le carré est égal à x.

Ainsi, pour tout réel positif x, $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x} \geq 0$.

Attention : les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée, en effet leur carré est positif.

Les nombres dont la racine carrée est un entier sont les carrés parfaits; il est utile de les reconnaître immédiatement : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc...

En général on ne peut écrire que des valeurs approchées des racines carrées sous forme décimale. Ainsi : $\sqrt{2} \approx 1,414$; $\sqrt{3} \approx 1,732$; $\sqrt{5} \approx 2,236$

B- Racines carrées et opérations

1- Propriété préliminaire

Deux nombres <u>positifs</u> qui ont des carrés égaux sont égaux.

Démonstration

Soient a et b deux réels positifs tels que $a^2 = b^2$.

On a alors $a^2 - b^2 = 0$, soit $(a + b)(a - b) = 0$. D'où les deux possibilités :

- soit $a + b = 0$ et $a = -b$ ce qui est impossible si a et b sont positifs
- soit $a - b = 0$ et $a = b$.

2- Propriétés

Soient a et b deux réels positifs. Comparons $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

On a : $(\sqrt{ab})^2 = ab$ en appliquant la définition des racines carrées, et

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$

On en déduit que : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est le produit des racines carrées de ces nombres.

On démontre qu'il en va de même pour les quotients.

Si a et b sont deux nombres positifs avec $b \neq 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Attention

Il n'y a pas de propriétés similaires pour l'addition et la soustraction.

Le carré de $\sqrt{a+b}$ est $a + b$.

Par contre le carré de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

Comme les expressions $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ n'ont en général pas le même carré, elles ne sont pas égales.

3- Utilisation des carrés parfaits

Si a et b sont deux nombres positifs, on a l'égalité $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

En effet, $\sqrt{a^2 b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
Cette égalité permet de transformer certaines racines carrées et parfois de les ajouter ou de les soustraire en faisant apparaître un facteur commun.
Etudions les nombres $\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$.
En remarquant que 12 et 27 sont divisibles par des carrés parfaits (12 = 4 × 3 et 27 = 9 × 3), nous pouvons écrire :
$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ et $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.
Ainsi, la somme de $\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ est $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

C- Dénominateurs rendus rationnels

Lorsque des quotients contiennent des racines carrées au dénominateur, il peut être intéressant de les faire disparaître du dénominateur, par exemple pour effectuer des additions.
On utilise pour cela la propriété de simplification des quotients : on ne change pas la valeur d'un quotient en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

1- Premier cas

> Soient *a* et *b* deux réels, b étant positif et non nul. On a alors l'égalité : $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$.

Il a suffi de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

Exemple
$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

2- Deuxième cas

> Soient *a* et *b* deux réels positifs différents. On a l'égalité : $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

Il a suffi de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ pour obtenir :
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\ .$$
L'idée est de faire apparaître l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ sous la forme $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$.
On dit que les expressions $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont des expressions conjuguées.

Exemple
$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ .$$