Puissances

L'opération qui consiste à répéter plusieurs fois la même addition peut être traduite par une multiplication, ainsi 3 + 3 + 3 + 3 = 3 × 4. *Celle qui consiste à répéter plusieurs fois la même multiplication, peut être remplacée par une puissance, ainsi* 3 ×3 ×3 × 3 = 3^4. *La notion de puissance va nous permettre d'écrire de façon abrégée des nombres très grand ou très petit.*

A- Définitions et premières propriétés

Puisque les puissances consistent à répéter plusieurs fois la même multiplication, elles ont des propriétés intéressantes lorsqu'on les compose avec des multiplications.

1- Définitions

> Considérons un nombre réel *r* et un entier naturel *n* supérieur ou égal à 2.
> On désigne par r^n (lire «***r puissance n***») le produit de *n* facteurs égaux à *r*.
> Le nombre n est appelé **exposant** de la puissance.

Exemples

- $4^3=4\times4\times4=64$; attention à ne pas confondre avec 4+4+4 qui est égal à 4x3, donc à 12.
- $2^{10}=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1024$; on est bien loin de 2x10=20.

Cas particuliers

- Pour c^2 qui est égal à $c\times c$ et représente l'aire d'un carré de côté *c*, on peut dire « c au carré » au lieu de «c puissance 2».
- Pour c^3 qui est égal à $c\times c\times c$ et représente le volume d'un cube d'arête *c*, on dire «c au cube» au lieu de «c puissance 3».
- La définition donnée pour des entiers n supérieurs ou égaux à 2 s'étend simplement au cas *n* = 1 en posant $r^1=r$.

2- Propriétés

Comme les puissances sont des multiplications, elles ont des propriétés intéressantes lorsqu'on les multiplie entre elles.
Soient a et b deux nombres réels, n et p deux entiers naturels non nuls. On a alors les égalités suivantes :

- $a^n\times a^p=a^{n+p}$ (en multipliant n facteurs a par p facteurs a on obtient (n+p) facteurs a)
- $\left(a^n\right)^p=a^{np}$ (en multipliant entre eux p facteurs qui sont des produits de n facteurs a on obtient pn facteurs a)
- $(ab)^n=a^n\times b^n$ (on a simplement changer l'ordre des facteurs a et b, l'exposant n a été distribué sur les facteurs du produit)

Les quotients donnent aussi lieu à des propriétés intéressantes.

Soient a et b deux nombres réels, b étant non nul, et soient n et p deux entiers naturels non nuls. On a alors les égalités suivantes :

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
- si $n>p$, $\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$, tandis que si $n<p$, $\frac{a^n}{a^p}=\frac{1}{a^{p-n}}$

Attention
Il n'y a malheureusement pas de propriétés similaires lorsqu'on effectue des additions ou des soustractions de puissances.
Exemples

- $(2a^2b)\times(5a^3b^2)=2\times5\times a^2\times a^3\times b\times b^2=10a^5\times b^4$
  (comme le calcul ne contenait que des produits on a pu modifier l'ordre des facteurs)
- $(3a^2b^3)^2=3^2\times(a^2)^2\times(b^3)^2=9a^4b^6$
  (on a distribué l'exposant 2 sur les trois facteurs du produit entre parenthèses)
- $\frac{a^5}{a^2}=\frac{a^2\times a^3}{a^2}=\frac{a^3}{1}=a^3$
  (on a fait apparaître une simplification par a^2)

B- Exposant négatif

La définition des puissances peut s'étendre de façon logique au cas où l'exposant est négatif en posant $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ *. Les propriétés des puissances sont conservées .*

Observons le tableau suivant qui donne les puissances de 2.

Exposant	1	2	3	4	5	6
Puissances de 2	2	4	8	16	32	64

Lorsqu'on lit les puissances de 2 de la **gauche vers la droite**, on passe d'une puissance à la suivante en **multipliant** par 2 et le tableau peut être continué indéfiniment.
Si on décide de lire les puissances de 2 en allant de la **droite vers la gauche**, on passe d'une puissance à la précédente en **divisant** par 2. Le tableau s'arrête sur la gauche à $2^1=2$, mais rien ne nous empêche d'imaginer ce qui pourrait se passer avant. On obtient le nouveau tableau :

Exposant	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Puissance de 2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Ceci nous permet d'abord de donner une définition de 2^0 qui est égal à 1, puis de définir de proche en proche les puissances de 2 à exposant négatif.

1- Définition

Soit a un nombre réel différent de 0 et n un entier naturel.
Par définition :

$a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

a^{-n} est donc tout simplement l'inverse de a^n

Exemples

- $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
- $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

Attention
Ce n'est pas parce que l'exposant est négatif que la puissance est un nombre négatif ; les deux exemples précédents montrent clairement qu'il n'en est rien.

2- Propriétés

Les propriétés vues pour les puissances à exposant positif restent vraies dans le cas des exposants négatifs ou nuls lorsqu'on les applique à des nombres différents de 0.
Soient a et b deux nombres réels non nuls, n et p deux entiers relatifs. On a alors les égalités suivantes :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$, $(a^n)^p = a^{np}$, $(ab)^n = a^n \times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Remarque
La dernière propriété a été simplifiée, on n'a plus besoin de distinguer les cas $n < p$ et $n > p$.

Exemples

- $a^3 \times a^{-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $\frac{a^3}{a^{-1}} = a^{3-(-1)} = a^4$

C- Notation scientifique des nombres

L'utilisation des puissances de 10 permet d'écrire simplement des nombres décimaux très grands ou très petits, et donc de montrer leur ordre de grandeur.

1- Puissances de 10

Dans notre système de numération en base 10, le calcul des puissances de 10 est particulièrement simple.

Cas d'un exposant positif n : 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n chiffres 0.

Exemples à connaître parfaitement
- $10^3 = 1000$; l'exposant 3 correspond aux milliers.
- $10^6 = 1000000$; l'exposant 6 correspond aux millions.
- $10^9 = 1000000000$; l'exposant 9 correspond aux milliards.

Cas d'un exposant négatif – n : 10^{-n} s'écrit avec le chiffre 1 précédé de n chiffres 0, une virgule étant placée après le premier 0.

Exemples à connaître parfaitement
- $10^{-1} = 0{,}1$; l'exposant - 1 correspond aux dixièmes.
- $10^{-2} = 0{,}01$; l'exposant - 2 correspond aux centièmes.
- $10^{-3} = 0{,}001$; l'exposant - 3 correspond aux millièmes.

2- Multiplier un décimal par une puissance de 10

La multiplication des nombres décimaux par des puissances de 10 se fait de manière très simple.
Pour multiplier par 10^n , il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la droite si n est positif et de (-n) rangs vers la gauche si n est négatif.

Exemples
- $1{,}7 \times 10^3 = 1700$
- $3{,}4 \times 10^{-2} = 0{,}034$

3- Notation scientifique des nombres

Les très grands nombres comme 17000000000 *(17 milliards) s'écrivent en se terminant par de nombreux* 0*. Les très petits nombres comme* 0,000005 *(5 millionièmes) s'écrivent en commençant par de nombreux* 0*. Tous ces chiffres 0 rendent la lecture de ces nombres malaisée. Les scientifiques ont imaginé une façon plus pratique d'écrire ces nombres en utilisant les puissances de 10.*

> Un nombre décimal est écrit avec la notation scientifique lorsqu'il est présenté sous la forme du produit d'un nombre décimal situé entre 1 (compris) et 10 (exclu) par une puissance de 10.

Exemples
- 17 milliards s'écrira $1{,}7 \times 10^{10}$; on se souvient que l'exposant 9 correspond aux milliards, on a ici des dizaines de milliards ce qui nous mène à l'exposant 10.
- 5 millionièmes s'écrira 5×10^{-6} ; on se souvient que l'exposant 6 correspond aux millions, l'exposant –6 correspond donc aux millionièmes.

4- Les calculatrices

Les calculatrices ne peuvent afficher leurs résultats qu'avec un nombre restreint de chiffres (12 en général). Elles savent cependant fournir des résultats qui sont très grands ou très petits grâce à la notation scientifique des nombres.

Exemples

- Calculons 1700000x350000. La calculatrice répond 5.95 E11. Ce résultat doit être interprété comme signifiant $5,95\times10^{11}$, c'est à dire 595 milliards.
  Sans calculatrice, nous aurions écrit :
  $1700000\times350000=1,7\times10^6\times3,5\times10^5=1,7\times3,5\times10^6\times10^5=5,95\times10^{11}$.
- Calculons $\frac{0,000014}{50000}$. La calculatrice répond 2.8E- 10. Ce résultat signifie $2,8\times10^{-10}$.
  Sans calculatrice, nous aurions écrit :
  $\frac{0,000014}{50000}=\frac{1,4\times10^{-5}}{5\times10^4}=\frac{1,4}{5}\times\frac{10^{-5}}{10^4}=0,28\times10^{-9}=2,8\times10^{-10}$.