

Nombres premiers

A- Diviseurs d'un entier naturel

1- Définition

Un entier naturel b est un diviseur de l'entier naturel a lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0. Il existe alors un entier naturel q tel que $a = b \cdot q$

Exemples :

- 7 est-il un diviseur de 56 ? Oui, car $56 = 7 \times 8$
- 15 est un diviseur de 60 car $60 = 15 \times 4$

A retenir :

Les expressions suivantes ont la même signification :

- b est un diviseur de a
- a est multiple de b
- a est divisible par b

2- Caractères de divisibilité

Pour savoir si un entier naturel a est divisible par un entier naturel b on peut toujours effectuer la division de a par b et regarder si le reste est égal à 0.

Il existe cependant quelques règles simples qui permettent de reconnaître les entiers naturels divisibles par **2**, par **3** ou par **5**.

Les nombres entiers qui se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8 sont divisibles par 2.

Les nombres entiers qui se terminent par 0 ou 5 sont divisibles par 5.

Les nombres entiers dont la somme des chiffres est divisible par 3 sont eux-mêmes divisibles par 3.

Exemples

- 1358 est divisible par 2 ; il suffit de remarquer que son dernier chiffre est 8.
- 745 est divisible par 5 ; il suffit de remarquer que son dernier chiffre est 5.
- 114 est divisible par 3 ; il suffit de remarquer que la somme de ses chiffres qui est $1+1+4$, soit 6, est divisible par 3.

Attention

Il ne faut pas inventer des caractères de divisibilité qui n'existent pas.

- Les nombres qui se terminent par 3, 6 ou 9 ne sont pas obligatoirement divisibles par 3, il suffit de penser à 13, 16 ou 19.
- Les nombres qui se terminent par 7 ou dont la somme des chiffres est un multiple de 7 ne sont pas obligatoirement divisibles par 7, il suffit de penser à 17 ou à 34.

Les règles qui sont valables pour 2, 3 et 5 ne s'étendent pas aux autres nombres.

3- Une propriété utile

La somme ou la différence de deux entiers divisibles par un entier a est aussi divisible par a . Cette propriété peut se révéler utile lorsqu'on ne peut pas utiliser les caractères de divisibilité.

Exemples

- Le nombre 1734 est-il divisible par 17 ?
En remarquant que $1734=1700+34$, on voit que 1734 est la somme de deux nombres divisibles par 17, 1734 est donc divisible par 17.
- Le nombre 133 est-il divisible 7 ?
En remarquant que $133=140-7$, on voit que 133 est la différence de deux nombres divisibles par 7, 133 est donc aussi divisible par 7.

Démonstration

Soient n_1 et n_2 deux entiers divisibles par a . Cela signifie qu'il existe un entier q_1 tel que $n_1 = a.q_1$ et un entier q_2 tel que $n_2 = a.q_2$. Alors $n_1 + n_2 = a.q_1 + a.q_2 = a(q_1 + q_2)$, donc $n_1 + n_2$ est divisible par a . De même $n_1 - n_2 = a.q_1 - a.q_2 = a(q_1 - q_2)$ et $n_1 - n_2$ est aussi divisible par a .

B- Nombres premiers

L'égalité $n = n \times 1$ nous montre que tout entier naturel supérieur à 1 a au moins deux diviseurs : 1 et lui même. Les nombres premiers sont les nombres qui n'ont pas d'autres diviseurs.

1- Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui a **exactement** deux diviseurs : 1 et lui même.

Exemples :

- 2, 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers
- 4 n'est pas un nombre premier car il a trois diviseurs : 1, 4 et 2
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

A retenir :

Il est utile de connaître les nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Attention

Les nombres pairs supérieurs à 2 ne sont pas premiers car ils ont au moins 3 diviseurs : 1, 2 et eux mêmes. Cela ne signifie cependant pas que les nombres impairs, qui ne sont pas pairs, soient des nombres premiers. Par exemple 21, 27, 33 sont impairs mais divisibles par 3, ils ne sont donc pas premiers.

2- Une méthode pour reconnaître les nombres premiers

Pour montrer qu'un nombre entier est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

Exemple :

Le nombre 127 est-il premier ?

Comme $\sqrt{127} \approx 11,27$, il nous suffit de vérifier que 127 n'est divisible par aucun des nombres 2, 3, 5, 7 et 11.

Les caractères de divisibilité montrent que 127 n'est pas divisible par 2 ou par 3 ou par 5.

Pour 7 et 11 on effectue les divisions euclidiennes :

a) $127 = 18 \times 7 + 1$, le reste de la division de 127 par 7 est 1. 127 n'est donc pas divisible par 7.

b) $127 = 11 \times 11 + 6$, le reste de la division de 127 par 11 est 6. 127 n'est donc pas divisible par 11.

On en conclut que 127 est un nombre premier.

C- Décomposition en produit de facteurs premiers

1- Propriété

Tout entier naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemples

- $15 = 3 \times 5$
- $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

Attention

La décomposition en produit de facteurs premiers est unique.

Ainsi, $18 = 2 \times 9$ ou $18 = 3 \times 6$ ne sont pas des décompositions en produit de facteurs premiers de 18, car 9 et 6 ne sont pas premiers. La seule décomposition en produit de facteurs premiers de 18 est $2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

2- Méthodes de décomposition

Pour obtenir la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers on pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes appliquées à **350**.

a) Méthode 1

On écrit **350** sous la forme d'un produit, puis on recommence avec chacun des facteurs obtenus tant que c'est possible.

$$350 = 35 \times 10 = 5 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 = 2 \times 5^2 \times 7$$

b) Méthode 2

On effectue des divisions successives par les nombres premiers (2, 3, 5, 7, 11,...) tant que c'est possible. Les résultats sont placés dans un tableau.

350	2
75	5
35	5
7	7
1	

 350 est divisible par 2, le quotient est 175.

175 n'est divisible ni par 2, ni par 3, mais 175 est divisible par 5, le quotient est 35.

35 est encore divisible par 5, le quotient est 7.

7 n'est pas divisible par 5, mais 7 est divisible par 7, le quotient est 1, ce qui termine le tableau.

On lit le résultat dans la 2^{ème} colonne du tableau : $350 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 = 2 \times 5^2 \times 7$

3- Application à la simplification des fractions

La décomposition des entiers naturels en produits de facteurs premiers permet de simplifier les fractions au maximum, donc de les rendre irréductibles.

On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis on simplifie jusqu'à ce qu'ils soient composés de facteurs premiers différents.

Exemple :

Simplifions la fraction $\frac{28}{70}$.

On a $28 = 2^2 \times 7$ et $70 = 2 \times 5 \times 7$, d'où

$$\frac{28}{70} = \frac{2^2 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{2}{5} .$$

Remarque

Pour obtenir la fraction irréductible, on a simplifié $\frac{28}{70}$ par 2 et par 7, donc par $2 \times 7 = 14$; 14 est le

PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de 28 et 70.