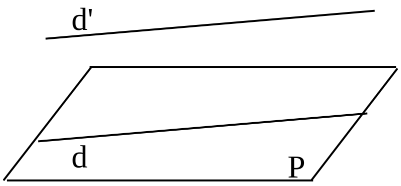
Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

A. Parallélisme dans l'espace

1- Droite parallèle à un plan

> Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite du plan.

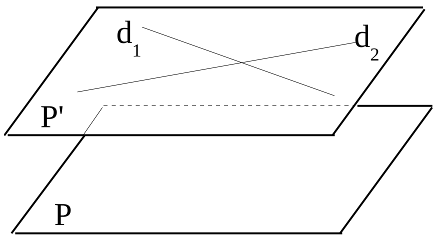


Hypothèses :
- la droite d est incluse dans le plan P
- les droites d et d' sont parallèles

Conclusion :
La droite d est parallèle au plan P.

2- Plans parallèles

> Pour que deux plans soient parallèles, il suffit que l'un d'entre eux contienne deux droites sécantes parallèles à l'autre.



Hypothèses :
- le plan P' contient les droites sécantes d_1 et d_2
- les droites d_1 et d_2 sont parallèles à P

Conclusion :
Le plan P' est parallèle au plan P.

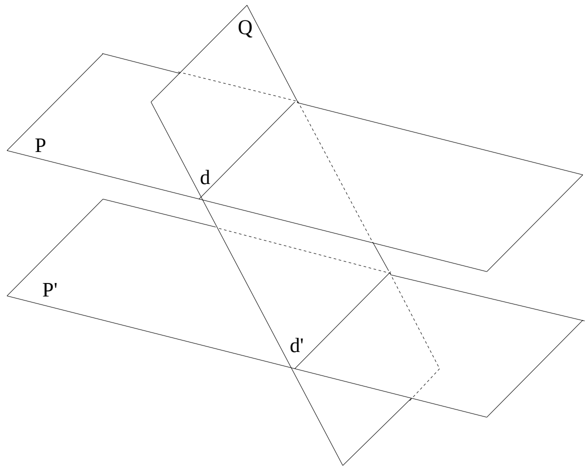
3- Transitivité du parallélisme

> Si deux droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
>
> De même :
>
> Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Attention
Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas obligatoirement parallèle entre elles.
De même, deux plans parallèles à une même droite ne sont pas obligatoirement parallèles entre eux.

4- Plan coupant deux plans parallèles

> Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant les coupe suivant des droites parallèles.



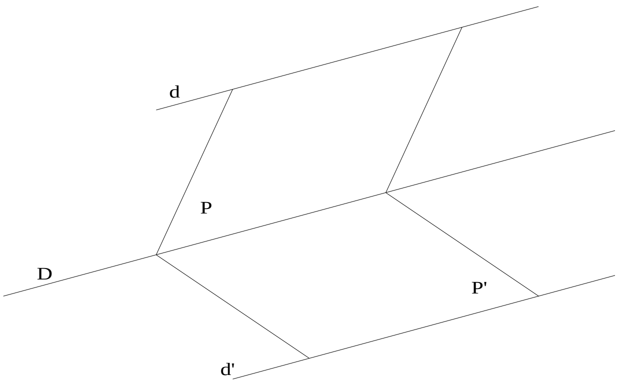
Hypothèses :

P et P' sont deux plans parallèles.
Le plan Q coupe P suivant la droite d
et P' suivant la droite d'.

Conclusion :
Les droites d et d' sont parallèles.

5- Théorème du toit

> Si deux plans sécants contiennent des droites parallèles, alors leur intersection est parallèle à ces droites. *(théorème du toit)*



Hypothèses :
P et P' se coupent suivant la droite D;
P contient la droite d
et P' contient la droite d';
d et d' sont parallèles.

Conclusion :
La droite D est parallèle aux droites d et d'.

B. Orthogonalité dans l'espace

1- Droites perpendiculaires et droites orthogonales

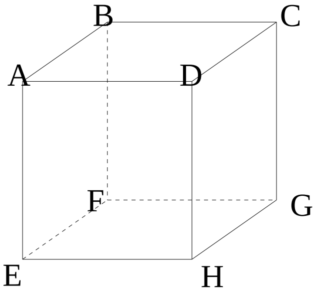
> On dit que deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

Remarque : deux droites perpendiculaires sont sécantes, donc coplanaires.

> On dit que deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.

Remarque : deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Exemples



Dans le cube ABCDEFGH :
- les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires, elles sont sécantes et forment un angle droit
- les droites (AB) et (FG) sont orthogonales, effet la droite (FG) est parallèle à la droite (BC) qui est perpendiculaire à (AB).

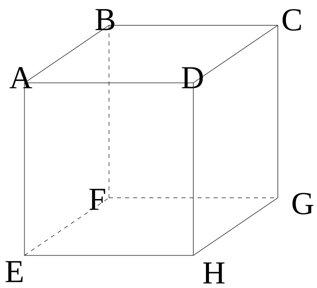
2- Droite perpendiculaire à un plan

> On dit qu'une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Propriété fondamentale

> Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Exemple



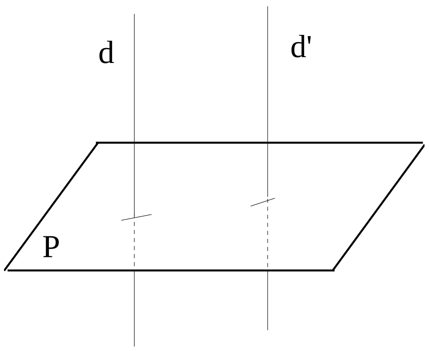
Dans le cube ABCDEFGH , la droite (AE) est perpendiculaire au plan (EFG), en effet elle est orthogonale à (EF) et à (EH).

Comme (AE) est perpendiculaire au plan (EFG) elle est orthogonale à toutes les droites de (EFG), donc (AE) est orthogonale à (FH) et à (EG).

3- Relations entre parallélisme et orthogonalité

Propriété 1

> Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

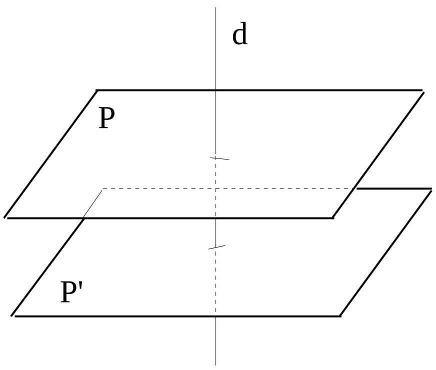


Hypothèses :
- d est perpendiculaire à P
- d' est perpendiculaire à P

Conclusion :
d et d' sont parallèles.

Propriété 2

> Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.



Hypothèses :
- d est perpendiculaire à P
- d est perpendiculaire à P'

Conclusion :
P et P' sont parallèles.

Attention
Contrairement à ce qui se passe dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième ne sont pas obligatoirement parallèles.
Ainsi, dans le cube ABCDEFGH, les droites (AD) et (DH) sont perpendiculaires à (DC), mais elles ne sont pas parallèles.