Ordre et opérations

Les nombres réels permettent d'effectuer des opérations d'une part et des comparaisons d'autre part. Il est utile de connaître les rapports entre ces deux types d'actions, en particulier pour évaluer la précision d'un calcul effectué avec des valeurs approchées.

A. Effet des additions et des multiplications

En ajoutant un même nombre aux deux membres d'une inégalité on obtient une inégalité de même sens. En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre on obtient une inégalité dont le sens dépend du signe du facteur utilisé.

1- Rappel préliminaire

> On peut connaître l'ordre de deux nombres réels a et b en déterminant le signe de leur différence $b – a$.
>
> Si $b – a$ est positif, alors $a < b$.
>
> Si $b - a$ est négatif, alors $a > b$.

Nous utiliserons cette propriété pour démontrer les autres propriétés.

2- Ordre et addition

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel e quelconque.
Comparons $a+e$ et $b+e$.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $(b + e) – (a + e)$.
$(b + e) – (a + e) = b + e – a – e = b – a$.
Comme $a < b$, $b – a$ est positif, donc $(b + e) – (a + e)$ est positif et $a + e < b + e$.

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a + e < b + e$.
>
> Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

Remarque
Comme les soustractions peuvent toujours être remplacées par des additions (pour soustraire un nombre on ajoute son opposé), elles ont le même effet que les additions sur les inégalités.

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a – e < b – e$.
>
> Soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

3- Ordre et multiplication

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel k quelconque.
Comparons ka et kb.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $kb – ka$: $kb – ka = k(b – a)$.
Comme $a < b$, $b – a$ est positif. Le signe de $k(b – a)$ est donc le signe de k.
Si k est positif, $kb – ka$ est positif donc $ka < kb$.

Si k est négatif, $kb - ka$ est négatif donc $ka > kb$.

> Quels que soient les réels a, b et k :
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k > 0}$, alors $ka < kb$.
>
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif** fournit une nouvelle inégalité de même sens.
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k < 0}$, alors $ka > kb$.
>
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **négatif** fournit une nouvelle inégalité de sens contraire.

Remarque 1
En prenant $k = -1$, on retrouve une propriété déjà observée : si $a < b$, alors $-a > -b$; en changeant le signe de deux nombres, on change leur ordre.

Remarque 2
Comme les divisions peuvent toujours être remplacées par des multiplications (pour diviser par un nombre on multiplie par son inverse), elles ont le même effet que les multiplications sur les inégalités.

4- Inéquations

Résoudre une inéquation d'inconnue x consiste à déterminer l'ensemble des réels x vérifiant une inégalité. On le fait en général en utilisant les propriétés précédentes.

Exemples
a) Résoudre l'inéquation $3x - 5 < 2$.
On commence par ajouter 5 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $3x < 7$.
On divise les deux membres de l'inéquation par 3 qui est positif; l'ordre est conservé et on obtient $x < \frac{7}{3}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels inférieurs à $\frac{7}{3}$, c'est à dire l'intervalle $]-\infty ; \frac{7}{3}[$.

b) Résoudre l'inéquation $x + 7 < 5x$.
On commence par soustraire $5x$ aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x + 7 < 0$.
On soustrait 7 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x < -7$.
On divise les deux membres par -4 qui est négatif; l'ordre est inversé et on obtient $x > \frac{7}{4}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels supérieurs à $\frac{7}{4}$, c'est à dire l'intervalle $]\frac{7}{4} ; +\infty[$.

B. Ordre et nombres positifs

Comparer le quotient de deux nombres positifs avec 1, comparer les inverses de deux nombres positifs, comparer un nombre positif et son carré.

1- Comparer le quotient de deux nombres positifs avec 1

Considérons deux nombres positifs *a* et *b* (*b* non nul). Comparons $\frac{a}{b}$ et 1.

Pour cela nous étudions le signe de leur différence $1-\frac{a}{b}$: $1-\frac{a}{b}=\frac{b}{b}-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$.

Comme *b* est positif, le signe de $\frac{b-a}{b}$ est le signe de $b - a$.

Si $b - a$ est positif, donc si $a < b$, $1-\frac{a}{b}$ est positif, donc $\frac{a}{b}<1$.

Si $b - a$ est négatif, donc si $a > b$, $1-\frac{a}{b}$ est négatif, donc $\frac{a}{b}>1$.

> Soient a et b deux nombres positifs.
>
> Si $a < b$, alors $\frac{a}{b}<1$. Si $a > b$, alors $\frac{a}{b}>1$.

2- Inverses de nombres positifs

Considérons deux nombres positifs non nuls *a* et *b* tels que $a < b$.
Comparons leurs inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Pour cela nous étudions le signe de leur différence $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$: $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a}{ab}-\frac{b}{ab}=\frac{a-b}{ab}$.

Comme *a* et *b* sont positifs, le signe de $\frac{a-b}{ab}$ est le signe de $a - b$.

Comme $a < b$, $a - b$ est négatif, donc $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ est négatif et $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

> Quels que soient les nombres positifs *a* et *b*, si $a < b$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.
>
> Prendre l'inverse de deux nombres positifs inverse leur ordre.

3- Comparer un nombre positif et son carré

Considérons un nombre positif *x*. Comparons *x* et x^2.
Pour cela nous étudions le signe de leur différence $x^2 - x$: $x^2 - x = x(x - 1)$.
Comme *x* est positif, le signe de $x(x - 1)$ est le signe de $x - 1$.
Si $x - 1$ est positif, donc si $x > 1$, $x^2 - x$ est positif, donc $x^2 > x$.
Si $x - 1$ est négatif, donc si $x < 1$, $x^2 - x$ est négatif, donc $x^2 < x$.

> Si $x > 1$, alors $x^2 > x$.
>
> Si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$.

C. Encadrements et opérations

Les encadrements permettent de connaître la précision d'une valeur approchée. Connaître l'effet des opérations sur les encadrements est utile pour évaluer l'erreur commise en remplaçant une valeur exacte par une valeur approchée.

1- Encadrement et valeur approchée

> Deux nombres réels a et b encadrent le nombre réel x lorsque $a < x < b$,
> c'est à dire $x \in]a, b[$.
> Le réel positif $b - a$ est appelé amplitude de l'encadrement.

Les calculettes donnent des résultats approchés qui peuvent être interprétés à l'aide d'encadrements.
Ainsi, pour $\sqrt{2}$, ma calculette affiche 1.414213562.
Cela peut se traduire par les encadrements suivants, avec divers degrés de précision :

$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$

etc.

On a une succession d'encadrement d'amplitudes 10^{-1}ou 0.1, 10^{-2} ou 0.01, 10^{-3} ou 0.001, etc.
On utilise à chaque fois une **valeur approchée par défaut**, obtenue par troncature (en supprimant les derniers chiffres), et une **valeur approchée par excès**, obtenue en ajoutant l'amplitude de l'encadrement à la valeur approchée par défaut.
On appelle **arrondi** la valeur approchée la plus proche de la valeur exacte.

2- Encadrements et additions

> Considérons deux réels x et y tels que $a < x < b$ et $c < y < d$.
> La somme $x+y$ est alors encadrée par $a+c$ et $b+d$. On a $a+c < x+y < b+d$.
> Il suffit d'additionner les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de $x+y$.

Exemple
Cherchons un encadrement de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,732<\sqrt{3}<1,733$$
$$3,146<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,148$$

3- Problème de la soustraction

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition (soustraire c'est ajouter l'opposé) pour pouvoir appliquer la propriété précédente.
Ainsi, pour encadrer $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, on considèrera la somme $\sqrt{2}+(-\sqrt{3})$, et on partira donc des encadrements de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{3}$.
Pour obtenir un encadrement de $-\sqrt{3}$, on part d'un encadrement de $\sqrt{3}$ et on multiplie tous les termes par –1. Attention, cela inverse l'ordre des trois nombres.

$$1,732<\sqrt{3}<1,733$$
$$-1,733<-\sqrt{3}<-1,732$$

Finalement, on a :

$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$-1,733<-\sqrt{3}<-1,732$$
$$-0,319<\sqrt{2}-\sqrt{3}<-0,317$$

4- Encadrements et multiplications

> Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que $0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
>
> Le produit xy est alors encadrée par ac et bd. On a $ac < xy < bd$.
>
> Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

Attention
Cette propriété n'est valable que si tous les nombres en jeu sont positifs. Nous savons en effet que la multiplication par des nombres négatifs modifie l'ordre.
Remarque
Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).