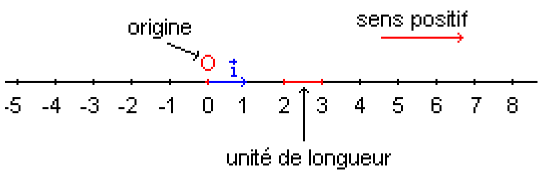
Ordre et droite graduée

On peut établir une correspondance exacte entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points d'une droite. Cela nous donne une idée intuitive de l'ordre des nombres réels.

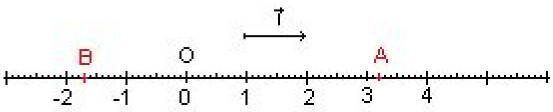
A. Droite graduée

Un repère $(O, \vec{i})$ *permet de graduer une droite et de mettre en correspondance les points de la droite avec l'ensemble des nombres réels.*

1- Graduer une droite



Pour graduer une droite on définit une origine, une unité de longueur et un sens positif.
L'origine est un point O, l'unité de longueur et le sens positif peuvent être donnés par un vecteur $\vec{i}$. On a ainsi un repère $(O, \vec{i})$.
A chaque nombre entier correspond un point.



En divisant les graduations par 10, comme sur un double décimètre, on voit qu'à chaque nombre ayant un chiffre après la virgule correspond un point.

Sur la figure, le nombre 3,2 correspond au point A et le nombre –1,7 correspond au point B.
En divisant les graduations par 100, 1000, etc., on voit qu'à chaque nombre décimal correspond un point. En imaginant que cette opération de division de l'unité soit continuée indéfiniment, on peut admettre qu'à chaque nombre réel correspond un point et que, réciproquement à chaque point correspond un nombre réel.

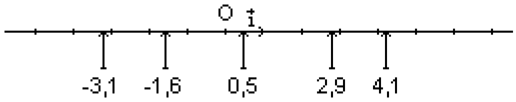
A retenir

Le nombre réel associé à un point A est l'abscisse de A, on le note x_A .
Sur la figure, $x_A = 3{,}2$ et $x_B = -1{,}7$.

2- Ordre des nombres réels

L'ordre des nombres réels est l'ordre des points correspondants sur une droite graduée.
L'ordre croissant (du plus petit au plus grand) correspond au sens positif sur la droite graduée.
Ainsi, pour comparer deux nombres réels, il suffit d'analyser la position des points correspondants sur une droite graduée.

Exemple



Sur la figure, on constate que :
-3,1 < -1,6 < 0,5 < 2,9 < 4,1

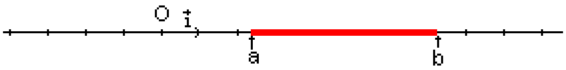
Premières propriétés

- Un nombre négatif est toujours inférieur à un nombre positif.
- En changeant le signe de deux nombres, on change leur ordre.
  Par exemple : 1,6 < 3,1 mais –1,6 > -3,1.

B. Intervalles

L'ensemble des nombres réels compris entre deux nombres a et b est un intervalle fini. L'ensemble des nombres supérieurs au nombre a et l'ensemble des nombres inférieurs au nombre a sont des intervalles infinis.

1- Intervalles finis



Considérons deux nombres réels a et b, tels que a<b.

L'ensemble des nombres réels compris entre a et b est un intervalle fini qui correspond à un segment sur une droite graduée.
On peut distinguer 4 cas selon que les nombres a et b sont ou non inclus dans l'intervalle.

1

1er cas : l'intervalle fermé **[a,b]** contient les nombres compris entre a et b, les nombres a et b étant inclus ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels $\mathbf{a \leq x \leq b}$.

2ème cas : l'intervalle ouvert **]a,b[** contient les nombres compris entre a et b, les nombres a et b étant exclus ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x < b}$.

3ème cas : l'intervalle **[a,b[** contient les nombres compris entre a et b, le nombre a étant inclus, mais b étant exclu; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a \leq x < b}$.

4ème cas : l'intervalle **]a,b]** contient les nombres compris entre a et b, le nombre a étant exclu, mais b étant inclus; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x \leq b}$.

Remarque
C'est le sens des crochets (ouvert ou fermé) qui indique si les extrémités sont ou ne sont pas incluses dans l'intervalle.

2- Intervalles infinis

Considérons un nombre réel a.

L'ensemble des nombres réels supérieurs à a est un intervalle infini qui correspond à une demi-droite sur une droite graduée.
L'ensemble des nombres réels inférieurs à a est aussi un intervalle infini, il correspond à la deuxième demi-droite.
Pour noter les intervalles infinis on utilise le symbole ∞ qui représente l'infini.
On peut distinguer 4 cas selon que le nombre a est ou non inclus dans l'intervalle.

1er cas : l'intervalle **[a,+∞ [** contient les nombres supérieurs ou égaux à a ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels $\mathbf{a \leq x}$.

2ème cas : l'intervalle **]a, +∞ [** contient les nombres strictement supérieurs à a ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x}$.

3ème cas : l'intervalle **]-∞, a]** contient les nombres inférieurs ou égaux à a; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{x \leq a}$.

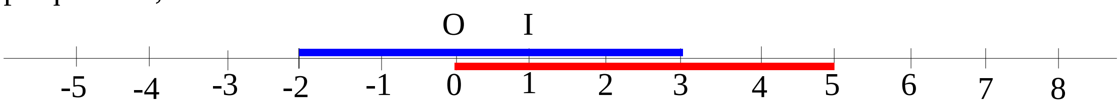
4ème cas : l'intervalle **] -∞, a [** contient les nombres strictement inférieurs à a; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{x < a}$.

Remarque
Les crochets sont toujours ouverts du côté de l'infini puisqu'on ne peut pas l'atteindre.

3- Intersection et réunion d'intervalles

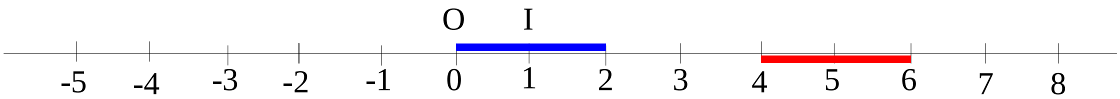
On considère deux intervalles I_1 et I_2.
L'intersection de I_1 et I_2 notée $I_1 \cap I_2$ (lire I_1 inter I_2) est formée par l'ensemble des réels qui sont dans I_1 **et** dans I_2.
L'intersection de I_1 et I_2 notée $I_1 \cup I_2$ (lire I_1 union I_2) est formée par l'ensemble des réels qui sont dans I_1 **ou** dans I_2.

Exemples
a) Déterminer [-2; 3] ∩ [0; 5] et [-2; 3] ∪ [0; 5]
Graphiquement, on obtient :



On en déduit que : [-2; 3] ∩ [0; 5] = [0; 3] et [-2; 3] ∪ [0; 5] = [-2; 5]

b) Déterminer [0; 2] ∩ [4; 6]
Graphiquement, on obtient :



Il n'y a aucun réel qui soit à la fois dans [0; 2] et dans [4; 6]. On traduit ceci en écrivant :
[0; 2] ∩ [4; 6] = $\emptyset$. Le symbole $\emptyset$ représente l'ensemble vide.
Dans ce cas, la réunion des intervalles [0; 2] et [4; 6] n'est pas un intervalle.

C. Distance et valeur absolue

La différence de deux nombres réels nous indique à la fois l'ordre de ces nombres grâce à son signe et l'écart qui existe entre ces nombres grâce à sa valeur absolue.

1- Valeur absolue

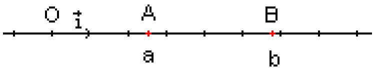
Un nombre positif est égal à sa valeur absolue. Un nombre négatif est égal à l'opposé de sa valeur absolue.
La valeur absolue d'un nombre réel x se note $|x|$.
Si x est positif, $|x| = x$.
Si x est négatif, $|x| = -x$.
La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

Exemples
|15| = 15; |-7| = 7.
Pour déterminer la valeur absolue de $1-\sqrt{2}$, on commence par déterminer le signe de $1-\sqrt{2}$.
Comme $1-\sqrt{2}<0$, $|1-\sqrt{2}|$ est l'**opposé** de $1-\sqrt{2}$. On a donc finalement
$|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$.

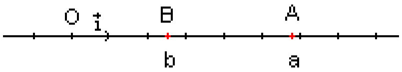
2- Interprétation de la différence de deux nombres

Considérons deux nombres réels a et b correspondants aux points A et B sur une droite graduée.
Etudions la différence $b - a$.

La **valeur absolue** de *b* - *a*, $|b-a|$ représente la **distance** entre les points *A* et *B*.
Le signe de *b* - *a* nous permet de connaître l'ordre des points *A* et *B*.



Si ***b* - *a* > 0**, le point *B* est derrière le point *A*,
on a donc *b* > *a*.



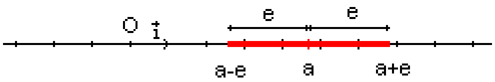
Si ***b* - *a* < 0**, le point *B* est devant le point *A*,
on a donc *b* < *a*.

Remarque 1
La différence *b* - *a* est appelée mesure algébrique de *AB*, on la note $\overline{AB}$. Sa valeur absolue est la distance entre *A* et *B*. Son signe nous permet de savoir si *A* est avant ou après *B*.

Remarque 2
Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.
Ainsi, pour comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, on calcule $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{8}{12}-\frac{9}{12}=\frac{-1}{12}$; comme la différence $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ est négative, $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$.

3- Intervalles et distances

Soient *a* un nombre réel et *e* un nombre réel positif.



L'ensemble des nombres réels *x* vérifiant l'inégalité $|x-a|<e$ est l'intervalle $]a-e\,,a+e[$.
Le nombre *a* est le centre de cet intervalle.