Les nombres

Les nombres sont au cœur de nombreuses activités humaines. On les utilise pour classer, pour mesurer, pour repérer, pour estimer des grandeurs.
En mathématiques on étudie les nombres pour eux-mêmes et on s'interroge sur leur nature. Un nombre est-il entier ? Est-il divisible par un autre ? Comment peut-on l'écrire ?

A- Les différents types de nombres

Selon les problèmes rencontrés les mathématiciens utilisent des nombres de types différents qu'ils ont classés dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1- Les entiers naturels

Les entiers naturels sont le 0, le 1 et tous les nombres égaux à une somme de 1.
L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.

Exemples
2=1+1, 3=1+1+1, 4=1+1+1+1, etc.
On pourra écrire $2 \in \mathbb{N}$ pour indiquer que 2 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$, donc que 2 est un entier naturel.

Remarques
Les entiers naturels ont un ordre qui permet de les comparer.
Les additions et les multiplications d'entiers naturels donnent des entiers naturels.
Par contre la soustraction de deux entiers naturels peut donner un résultat négatif qui n'est plus un entier naturel.

2- Les entiers relatifs

Les entiers relatifs sont les entiers naturels (qui sont positifs) et leurs opposés (qui sont négatifs).
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.

Exemples
7 , 8, (-5), (-12), 0 sont des entiers relatifs.

Remarques
Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs, cela se traduit par la relation $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, qui signifie que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
Les entiers relatifs ont un ordre qui prolonge celui des entiers naturels.
Les additions, les soustractions et les multiplications d'entiers relatifs donnent des entiers relatifs.

Par contre la division de deux entiers relatifs peut donner un résultat qui n'est plus un nombre entier.

3- Les nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les nombres qui sont égaux au quotient de deux nombres entiers relatifs, c'est à dire à des fractions.
L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Exemples

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{7}$ sont des nombres rationnels.

Remarques

Tout entier relatif est égal à son quotient par 1 et est donc un nombre rationnel, on a donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Les nombres rationnels ont un ordre qui prolonge celui des entiers relatifs.
Les additions, soustractions, multiplications et divisions de nombres rationnels donnent des nombres rationnels. Cela a mené les premiers mathématiciens a pensé que les nombres rationnels suffiraient pour résoudre tous leurs problèmes. On s'est vite aperçu qu'il n'en était rien.

4- Les nombres réels

Le théorème de Pythagore introduit des racines carrées. Le calcul du périmètre d'un cercle nécessite l'utilisation du nombre π . On a donc été amené à rechercher des nombres rationnels (des fractions) égaux à π ou à $\sqrt{2}$. La réponse trouvée (et démontrée) est que cela n'est pas possible. Il a donc fallu envisager un nouvel ensemble de nombres, plus vaste, qui permette au moins de mesurer toutes les longueurs rencontrées en géométrie.
Cet ensemble est l'ensemble des nombres réels, on le note $\mathbb{R}$.

Remarques

Les nombres entiers et les nombres rationnels permettent de mesurer certaines longueurs, ce sont donc aussi des nombres réels.
On a finalement les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Nous avons vu qu'il existe des nombres réels comme π ou $\sqrt{2}$ qui ne sont pas des nombres rationnels; on dit que ce sont des ***nombres irrationnels***.

B- Les nombres décimaux

Notre système d'écriture des nombres (avec la virgule) introduit un nouvel ensemble de nombres, l'ensemble des nombres décimaux, qui s'insère dans les ensembles précédents.
Nous utilisons pour les nombres entiers un système de numération en base 10 ; les nombres entiers s'écrivent à partir de 10 chiffres, chaque chiffre s'interprète selon sa position (unité, dizaine, centaine, etc.).

L’introduction des nombres à virgule avec leurs chiffres des chiffres des dixièmes, des centièmes, etc. permet d’utiliser de nouveaux nombres. Comment ces nombres s’insèrent-ils dans les différents ensembles de nombres définis par les mathématiciens ?

1- Nombres décimaux et nombres rationnels

> Les nombres décimaux sont les nombres égaux au quotient d’un entier relatif par une puissance de 10 (c’est à dire 1, 10, 100, 1000, 10000, etc.).

En effet :
Toute fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 peut s’écrire sous la forme d’un nombre à virgule. Par exemple : $\frac{7}{10}=0{,}7$ ou $\frac{1486}{100}=14{,}86$
Réciproquement, tout nombre à virgule peut s’écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Par exemple : $0{,}15=\frac{15}{100}$ ou $49{,}3=\frac{493}{10}$
Les nombres décimaux sont donc des nombres rationnels. Si on appelle ***D*** l’ensemble des nombres décimaux, on aura $\boldsymbol{D}\subset\mathbb{Q}$.

2- Suites décimales illimitées

Les algorithmes de calcul des divisions ou des racines carrées ne s’arrêtent parfois jamais et conduisent à des suites décimales illimitées.

Exemple 1
La division de 1 par 7 donne la suite décimale 0,142857142857142857142857…. qui ne se termine jamais (la série de chiffres 142857 se répète indéfiniment). Peut-on considérer le quotient de 1 par 7 comme un nombre décimal ?
Si nous nous référons à la définition donnée pour les nombres décimaux, il faudrait trouver une fraction égale à $\frac{1}{7}$ dont le dénominateur soit une puissance de 10. Cela n’est pas possible, le nombre $\frac{1}{7}$ n’est donc pas un nombre décimal.

Exemple 2
Le calcul de la racine carrée de 2 donne la suite décimale 1.41421356237309504880… qui ne se termine jamais bien qu’on ne trouve pas de série de chiffres qui se répète. La racine carrée de 2 n’est pas un nombre décimal.

A retenir
Tous les nombres réels peuvent être représentés par des suites décimales illimitées mais cela ne signifie pas qu’il s’agit de nombres décimaux ; un nombre décimal doit pouvoir être représenté comme quotient d’un entier par une puissance de 10, donc par une suite décimale finie.

C- Valeur exacte - Valeur approchée

La plupart des nombres réels ne sont pas des nombres décimaux, on se contente alors d'en donner des valeurs approchées décimales.
Les nombres décimaux ont l'avantage de nous être très familiers, d'être facilement comparables et de nous permettre ainsi d'évaluer rapidement leur ordre de grandeur.
Malheureusement, nous avons vu que la plupart des nombres réels ne sont pas des nombres décimaux.

1- Résultats approchés

Pour retrouver leurs avantages on donne souvent des valeurs approchées décimales des nombres réels et cela est utile pour communiquer des résultats.

Exemple
La longueur de la diagonale d'un rectangle de côtés 3cm et 5cm est $\sqrt{34}$ cm, dire qu'elle est environ 5,8cm est plus parlant.
Attention : il ne faut cependant pas confondre la valeur exacte d'un nombre réel qui n'est pas décimal et la valeur approchée qui permet de se faire une idée de son ordre de grandeur.
Ecrire $\sqrt{34}=5{,}8$ est faux, on écrira plutôt $\sqrt{34}\approx 5{,}8$.
De même remplacer $\sqrt{34}$ par 5,8 dans un calcul conduit à un résultat qui n'est plus exact.

2- La calculatrice

Les calculatrices représentent les nombres en n'utilisant qu'une quinzaine de chiffres, elles ne peuvent donc pas représenter les nombres réels non décimaux de façon exacte. Les résultats qu'elles donnent ne sont en général pas des résultats exacts, il s'agit de valeurs approchées.

Exemple 1
Lorsque je calcule $\sqrt{34}$, ma calculatrice indique 5.830951895. Cela ne signifie pas que $\sqrt{34}$ est égal à 5,830951895. Cela me permet simplement de dire que la valeur exacte de $\sqrt{34}$ est située entre 5,8309518945 et 5,8309518955.

Exemple 2
De même lorsque je divise 1.0000000001 par 10, ma calculatrice indique 0.1, or le résultat exact est 0.10000000001. Le résultat fourni par la calculatrice est bien un résultat approché.