Equations, inéquations et produits

A. Equations et produits

1- Propriété

> Pour qu'un produit de facteurs soit égal à 0 il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit égal à 0.

Cette propriété permet de résoudre les équations équivalentes à un produit égal à 0.

Exemple
Résoudre l'équation $(2x + 3)(x – 5) = 0$.
Le produit $(2x + 3)(x – 5)$ ne peut être égal à 0 que si $2x + 3= 0$ ou si $x – 5 = 0$.
Or :
$2x + 3 = 0$ pour $x = \frac{-3}{2}$
$x – 5 = 0$ pour $x = 5$
L'équation $(2x + 3)(x – 5)$ a donc deux solutions : $\frac{-3}{2}$ et 5.

2- Utiliser des factorisations

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $f(x) – g(x) = 0$.
En factorisant l'expression $f(x) – g(x)$ on se ramène au cas précédent : une équation sous forme de produit égal à 0.

Exemple
Résoudre l'équation $(x – 1)^2 = 9$.
Cette équation est équivalente à $(x – 1)^2 - 9 = 0$.
L'expression $(x – 1)^2 - 9$ est de la forme $a^2 – b^2$ avec $a = x – 1$ et $b = 3$, on peut donc la factoriser en utilisant l'identité $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$.
$(x – 1)^2 - 9 = (x – 1 + 3)(x – 1 – 3) = (x + 2)(x – 4)$.
L'équation $(x – 1)^2 - 9 = 0$ est donc équivalente à $(x + 2)(x – 4) = 0$.
Le produit $(x + 2)(x – 4)$ ne peut être égal à 0 que si $x + 2 = 0$ ou si $x – 4 = 0$.
Or :
$x + 2 = 0$ pour $x = -2$
$x – 4 = 0$ pour $x = 4$.
Finalement, l'équation $(x – 1)^2 = 9$ a deux solutions : -2 et 4.

B. Inéquations et produits

Commençons par rappeler deux propriétés que nous allons utiliser pour résoudre des inéquations du type $f(x) \times g(x) < 0$.

1- Règle des signes

> Le produit de deux nombres de même signe est positif.
> Le produit de deux nombres de signes différents est négatif.

Cette propriété permet de résoudre les inéquations équivalentes du type f(x) × g(x) < 0 ou du type f(x) × g(x) > 0. Il s'agit à chaque fois d'étudier le signe du produit f(x) × g(x).

2- Signe de a*x* + b

On distingue deux cas :

<u>Si a est positif</u>, la fonction affine f(x) = ax+b est croissante et s'annule pour x = $-\dfrac{b}{a}$, les valeurs de f(x) vont donc évoluer du négatif vers le positif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	-∞		$\frac{-b}{a}$		+∞
signe de f(x)		−	0	+	

<u>Si a est négatif</u>, la fonction affine f(x) = ax+b est décroissante et s'annule pour x = $-\dfrac{b}{a}$, les valeurs de f(x) vont donc évoluer du positif vers le négatif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	-∞		$\frac{-b}{a}$		+∞
signe de f(x)		+	0	−	

3- Etude d'un exemple

Résoudre l'inéquation (2x + 3)(-x + 5) < 0.
Pour étudier le signe du produit de 2x + 3 par –x + 5, commençons par étudier le signe de chacun des facteurs et regroupons les résultats dans un même tableau.

2x + 3 s'annule pour x = $-\dfrac{3}{2}$ et –x+5 s'annule pour x = 5.

On obtient le tableau suivant :

x	-∞		$\frac{-3}{2}$		5		+∞
2x+3		-	0	+		+	
-x+5		+		+	0	-	
(2x+3)(-x+5)		-	0	+	0	-	

On constate que le produit (2x+3)(-x+5) est négatif lorsque x < $-\dfrac{3}{2}$ ou lorsque x > 5.

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2x+3)(-x+5) < 0 est donc la réunion des intervalles]-∞ ; $-\dfrac{3}{2}$ [et]5 ; +∞[, soit]-∞ ; $-\dfrac{3}{2}$ [∪]5 ; +∞[.