Identités remarquables

Les identités remarquables permettent d'une part de développer rapidement les expressions du type (a+b)², (a-b)² et (a+b)(a-b) et d'autre part d'effectuer des factorisations sans utiliser de facteur commun.

A. Développer le carré d'une somme

Il est utile de connaître par cœur les résultats suivants qui permettent d'effectuer plus rapidement certains développements.

> Quels que soient les nombres réels a et b :
> $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
> $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ce sont les deux premières identités remarquables que l'on peut retrouver facilement :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples
1) Développer $(x + 3)^2$.
On reconnaît l'identité $(a + b)^2$, avec x qui joue le rôle de a et 3 qui joue le rôle de b. En appliquant le résultat fourni par cette identité, on obtient :
$(x + 3)^2 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

2) Développer $(3x - 2)^2$
On reconnaît l'identité $(a - b)^2$, avec $3x$ qui joue le rôle de a et 2 qui joue le rôle de b. En appliquant le résultat fourni par cette identité, on obtient :
$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$
Attention, le carré de $3x$ est $9x^2$.

B. Reconnaître un carré pour factoriser

En lisant les deux identités précédentes dans l'autre sens on obtient des formules qui permettent d'effectuer des factorisations.

> Quels que soient les réels a et b :
> $\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} + \mathrm{b})^2$
> $\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2$

On transforme des sommes en carrés, donc en produits.

1- Exemple 1

Factoriser A = $x^2 + 6x + 9$.
On reconnaît une expression du type $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.
Vérifions : $a^2 = x^2$; $b^2 = 9$; $2ab = 2\times x\times 3 = 6x$.

On en déduit que $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

2- Exemple 2

Factoriser B = $16x^2 - 8x + 1$.
On reconnaît une expression du type $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 1$.
Vérifions : $a^2 = (4x)^2 = 16x^2$; $b^2 = 1^2 = 1$; $2ab = 2\times4x\times1 = 8x$.
On en déduit que $16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$.

C. Différence de deux carrés

> Quels que soient les réels a et b : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Il s'agit de la troisième identité remarquable, que l'on retrouve facilement en effectuant un simple développement.
$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

La troisième identité peut aussi être lue : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Elle fournit ainsi une formule de factorisation de la différence de deux carrés.

1- Exemple de développement

Développer A = $(2x - 3)(2x + 3)$
A = $(2x - 3)(2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$.
On a appliqué la 3ème identité en prenant $a = 2x$ et b = 3.
Attention, le carré de $2x$ est $4x^2$.

2- Exemples de factorisation

1- Factoriser B = $9x^2 - 1$.
On remarque que $9x^2$ est le carré de $3x$ et que 1 est le carré de 1. L'expression B est donc une différence de deux carrés.
Appliquons la 3ème identité remarquable.
$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x + 1)(3x - 1)$.

2- Factoriser C = $16 - (2x + 1)^2$.
Comme 16 est le carré de 4, il s'agit bien d'une différence des carrés de 16 et de $2x + 1$.
Appliquons la 3ème identité remarquable :
C = $16 - (2x + 1)^2 = 4^2 - (2x + 1)^2 = [4 + (2x + 1)][4 - (2x + 1)]$
Il reste à réduire les deux facteurs entre crochets en appliquant la règle des parenthèses.
C = $(4 + 2x + 1)(4 - 2x - 1) = (2x + 5)(-2x + 3)$.