

Notion de fonction

On utilise parfois dans la vie courante l'expression « **en fonction de** » pour traduire une dépendance entre deux situations. En Mathématiques, une fonction traduit la dépendance entre deux nombres.

A- Définitions

Une fonction f permet d'associer à tout nombre x d'un ensemble D un nombre **unique** y .

L'ensemble D est appelé *ensemble de définition* de la fonction f .

Le nombre x est une *variable* qui parcourt cet ensemble.

Le nombre y est l'*image* de x .

Il est important de noter que tout élément de l'ensemble de définition a une image et que celle-ci est unique.

1. Calcul de l'image d'un nombre

L'image d'un nombre x par une fonction f se note $f(x)$; on lit «*f* de *x*».

Pour désigner la fonction qui à x associe $f(x)$ on écrit $f : x \mapsto f(x)$.

On définit une fonction en indiquant un moyen de déterminer $f(x)$ lorsque x est donné; cela se fait souvent avec une formule.

Exemples

1. Soit f la fonction qui à x associe son double. On écrira $f : x \mapsto 2x$

L'image de 5 est $2 \times 5 = 10$, on écrit $f(5) = 10$.

2. Soit g la fonction qui à x associe son carré. On écrira $g : x \mapsto x^2$

L'image de 3 est $3^2=9$, on écrit $g(3) = 9$.

3. Considérons la fonction $h : x \mapsto x^2 - 5x$ et calculons l'image de (-4) .

Il suffit de remplacer x par (-4) dans la formule qui définit la fonction h .

$$h(-4) = (-4)^2 - 5 \times (-4) = 16 + 20 = 36.$$

L'image de (-4) est donc 36.

2. Antécédent

Considérons une fonction f et deux réels a et b tels que $b = f(a)$.

Nous savons que b est l'image de a .

On dit alors aussi que a est **un** antécédent de b .

Attention

Le nombre a n'a qu'une image mais b peut avoir plusieurs antécédents, c'est ce qui explique l'utilisation de l'article « **un** ».

Retenons

Les antécédents par une fonction f d'un réel b sont les réels dont l'image est b , ce sont donc les solutions de l'équation $f(x) = b$; leur nombre dépend de la fonction f .

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x - 3$ et cherchons le ou les antécédents de 5.

Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 5, donc de résoudre l'équation $x - 3 = 5$. Celle-ci n'a qu'une solution qui est $x = 8$, donc 5 a un unique

antécédent qui est 8.

2. Considérons la fonction $g : x \mapsto x^2$ et cherchons le ou les antécédents de 25.
Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 25, donc de résoudre l'équation $x^2 = 25$. Celle-ci a deux solutions qui sont $x = 5$ et $x = -5$, donc 25 a deux antécédents qui sont 5 et -5.
3. Considérons la fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$ et cherchons le ou les antécédents de 0.
Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 0, donc de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Comme x^2 est toujours positif, $x^2 + 1$ est toujours supérieur ou égal à 1, il n'est donc pas possible de trouver un réel x tel que $x^2 + 1 = 0$. 0 n'a donc pas d'antécédent.

B- Représentation graphique d'une fonction

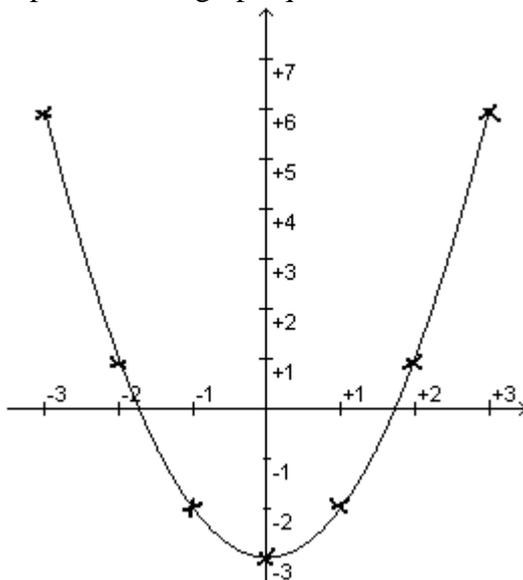
Soit f une fonction sur l'ensemble D .

Dans le plan muni d'un repère, on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points $M(x, y)$ pour lesquels x est élément de D et $y = f(x)$.

Ces points forment la courbe d'équation $y=f(x)$.

Exemple

Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ et construisons sa représentation graphique.



Pour effectuer cette construction nous commencerons par calculer un certain nombre d'images. Les résultats sont inscrits dans un tableau de valeurs :

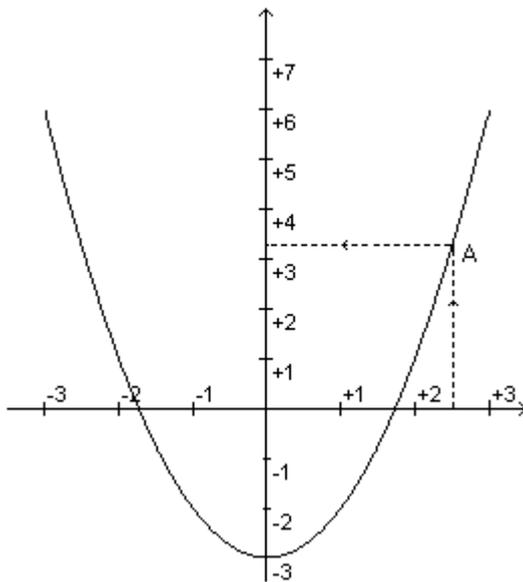
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

Dans le plan muni de son repère, on place les points de coordonnées $(x, f(x))$, puis on les relie par une courbe.

C- Utiliser les représentations graphiques

*La représentation graphique d'une fonction nous en donne une vision globale.
Elle permet par exemple de trouver des valeurs approchées d'images ou d'antécédents.*

1. Détermination d'une image



Reprenons la fonction f définie précédemment et utilisons la représentation graphique pour déterminer l'image de 2,5.

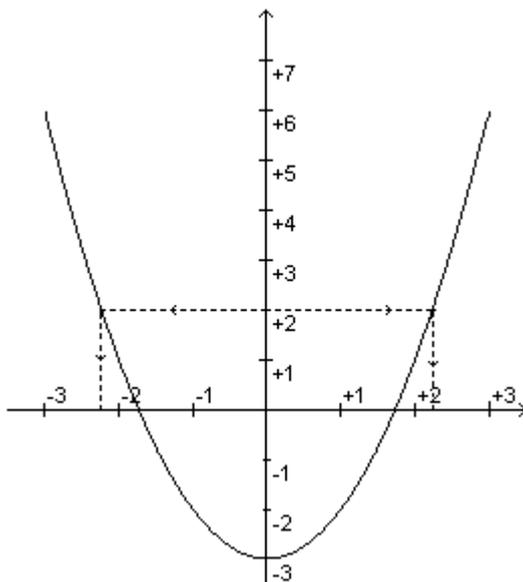
Il suffit de déterminer le point A de la courbe dont l'abscisse (c'est x) est 2,5, puis de lire son ordonnée (c'est y).

L'ordonnée de A est environ 3,2; on en déduit que $f(2,5) \approx 3,2$.

Il ne s'agit que d'une valeur approchée, la valeur exacte obtenue par calcul étant :

$$f(2,5) = 2,5^2 - 3 = 6,25 - 3 = 3,25.$$

2. Recherche d'antécédents



Reprenons encore la fonction f définie précédemment et utilisons la représentation graphique pour déterminer le ou les antécédents de 2.

Il suffit de trouver tous les points de la courbe dont l'ordonnée (c'est y) est 2, puis de lire les abscisses (c'est x) correspondantes.

On constate que deux points de la courbe ont une ordonnée égale à 2; leurs abscisses (environ 2,2 et -2,2) sont donc les antécédents de 2.