

Factorisations

Effectuer une factorisation, c'est transformer une expression donnée sous la forme d'une somme en un produit. C'est l'opération inverse du développement.

A. Facteur commun simple

L'opération de factorisation est l'opération inverse du développement : elle consiste à transformer une somme en un produit. Elle utilise aussi la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

1- Distributivité de la multiplication sur l'addition

Pour développer un produit, on utilise la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition : quels que soient les réels a , b et c , $a(b + c) = ab + ac$.

Pour factoriser une somme, c'est à dire la transformer en un produit, on utilise la même propriété en inversant l'ordre des termes de l'égalité.

Quels que soient les réels a , b et c : $ab + ac = a(b + c)$

Lorsqu'on applique cette égalité, on dit qu'on a mis a en facteur.

2- Mise en évidence du facteur commun

L'expression $ab + ac$ est la somme des deux produits ab et ac qui ont un facteur commun a . Pour pouvoir utiliser l'égalité $ab + ac = a(b + c)$, il faut donc mettre en évidence un facteur commun.

Exemples

- Mettre 5 en facteur dans l'expression $5a + 15$
 $5a + 15 = 5 \times a + 5 \times 3 = 5(a + 3)$
- Mettre $2x$ en facteur dans l'expression $10x^2 - 8x$
 $10x^2 - 8x = 2x \times 5x - 2x \times 4 = 2x(5x - 4)$

Remarque

Pour vérifier une factorisation, il suffit de la développer, on retrouve alors l'expression de départ. En développant $2x(x - 5)$ on retrouve bien $10x^2 - 8x$.

B. Facteur commun en forme de somme

Dans l'égalité $ab + ac = a(b + c)$, les variables a , b et c peuvent représenter des expressions comme des sommes ou des différences.

Voyons deux exemples classiques.

1- Exemple 1

Factoriser l'expression $E = (2x - 1)(3x + 2) - (2x - 1)(x - 3)$.

Cette expression est de la forme $ab - ac$ avec $a = 2x - 1$, $b = 3x + 2$ et $c = x - 3$.

En appliquant l'égalité $ab - ac = a(b - c)$ on obtient :

$$E = (2x - 1)[(3x + 2) - (x - 3)]$$

Pour remplacer a , b et c par les expressions correspondantes, il est nécessaire de rétablir des parenthèses pour préserver la priorité de la multiplication.

Finalement, il a suffi d'écrire entre les crochets l'expression E sans les deux occurrences du facteur commun.

On termine en réduisant le calcul écrit entre les crochets après avoir appliqué la règle des parenthèses.

$$E = (2x - 1)(3x + 2 - x + 3) = (2x - 1)(2x + 5)$$

2- Exemple 2

Factoriser l'expression $F = (x + 3)^2 + (x + 3)(x - 2)$.

On se ramène au cas précédent en remarquant que $(x+3)^2 = (x + 3)(x + 3)$.

D'où le calcul :

$$F = (x + 3)(x + 3) + (x + 3)(x - 2)$$

Le facteur commun est $x+3$.

$$F = (x + 3)[(x + 3) + (x - 2)]$$

$$F = (x + 3)(x + 3 + x - 2) = (x + 3)(2x + 1)$$

C. Cas mixtes

Il arrive que certaines expressions ne présentent pas de facteur commun évident. On peut cependant parfois mettre un facteur commun en évidence en procédant à une factorisation partielle, c'est à dire en effectuant une factorisation préalable de l'un des facteurs.

1- Exemple 1

Factoriser l'expression $E = (4x + 2)(2x - 3) + (2x + 1)(x + 2)$.

Cette expression n'est pas de la forme $ab + ac$, il n'y a pas de facteur commun évident.

Cependant on peut remarquer que $4x + 2$ peut être factorisé en $2(2x + 1)$.

On obtient alors :

$$E = 2(2x + 1)(2x - 3) + (2x + 1)(x + 2)$$

Sous cette forme, on voit apparaître le facteur commun $2x + 1$ et on peut donc procéder à la factorisation.

$$E = (2x + 1)[2(2x - 3) + (x + 2)]$$

On termine en réduisant le calcul écrit entre les crochets.

$$E = (2x + 1)(4x - 6 + x + 2) = (2x + 1)(5x - 4)$$

2- Exemple 2

Factoriser l'expression $F = (x - 5)(2x - 1) + (5 - x)(x + 2)$.

L'expression F n'a pas de facteur commun, mais on peut remarquer que $x - 5$ et $5 - x$ sont des nombres opposés, c'est à dire que $5 - x = -(x - 5)$.

On en déduit que :

$$F = (x - 5)(2x - 1) - (x - 5)(x + 2)$$

On a mis en évidence le facteur commun $x - 5$, on peut effectuer la factorisation et terminer le calcul.

$$F = (x - 5)[(2x - 1) - (x + 2)]$$

$$F = (x - 5)(2x - 1 - x - 2) = (x - 5)(x - 3)$$