# Expressions algébriques

*Les expressions algébriques font intervenir des opérations et des lettres qui représentent des nombres. Effectuer un calcul algébrique consiste à transformer une expression en une autre qui lui est égale.*

## A. Le vocabulaire des opérations

*Le résultat d'une opération a un nom : somme, différence, produit ou quotient. Il faut savoir utiliser ces noms pour décrire des expressions plus complexes.*

### 1- Résultat d'une opération

> Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.
> Le réel $a + b$ est appelé somme des deux termes $a$ et $b$.
> Le réel $a - b$ est appelé différence des deux termes $a$ et $b$.
> Le réel $ab$ est appelé produit des deux facteurs $a$ et $b$.
> Le réel $a/b$ est appelé quotient de $a$ par $b$.

### 2- Cas des suites d'opérations

Lorsqu'une expression fait intervenir plusieurs opérations, l'opération principale est celle qu'on effectue en dernier lorsqu'on applique la règle des priorités.

**Exemples**
1- Considérons l'expression $S = ab + cd$ .
Pour calculer S on effectue d'abord les produits $ab$ et $cd$, puis on termine avec leur somme : S est la somme de deux produits.
2- Considérons l'expression et $P = (a + b)(c + d)$.
Pour calculer P on effectue d'abord les sommes $a + b$ et $c + d$, puis on termine avec leur produit : P est le produit de deux sommes.

### 3- Carré et opposé

Certaines expressions algébriques font intervenir des fonctions comme la fonction carré ou la fonction opposé. En l'absence de parenthèses modifiant l'ordre des calculs, les fonctions doivent toujours être effectuées avant les opérations.

**Exemples**
1- L'expression $a + b^2$ est la somme du nombre $a$ et du carré de $b$, alors que l'expression $(a + b)^2$ est le carré de la somme de $a$ et $b$.
2- L'expression $-a^2$ est l'opposé du carré de $a$, alors que l'expression $(-a)^2$ est le carré de l'opposé de $a$.

## B. Expressions égales

Deux expressions algébriques sont égales lorsqu'elles fournissent le même résultat à chaque fois qu'on remplace les lettres qu'elles contiennent par des nombres.

Par exemple les expressions $a + a$ et $2a$ sont égales ; quel que soit le nombre $a$ considéré, effectuer la somme $a + a$ ou multiplier $a$ par 2 founit bien le même résultat. On peut donc écrire $a + a = 2a$.

**Attention**
Vérifier l'égalité sur quelques exemples de valeurs ne suffit pas pour pouvoir affirmer l'égalité de deux expressions ; il est nécessaire de fournir une démonstration générale basée sur les règles du calcul algébrique.
Par contre, il suffit d'un seul exemple de valeurs où l'égalité n'est pas vérifiée pour pouvoir affirmer que les expressions ne sont pas égales. On dit dans ce cas qu'on a fourni un contre-exemple.

**Exemple**
Le carré de la somme de deux nombres est-il égal à la somme des carrés de ces nombres ?
Autrement dit, les expressions $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ sont elles égales ?
Choisissons $a = 1$ et $b = 4$.
$(a + b)^2 = (1 + 4)^2 = 5^2 = 25$
$a^2 + b^2 = 1^2 + 4^2 = 1+16 = 17$
Les résultats obtenus sont différents, les expressions $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$ ne sont donc pas égales.

## C. Règles de bases

*Pour démontrer que deux expressions sont égales, on effectue des transformations sur l'une jusqu'à obtenir la seconde. Chaque transformation doit correspondre à une propriété des opérations. Rappelons les propriétés élémentaires à utiliser.*

### 1- Additions et soustractions

#### a) Suites d'additions

Dans une suite d'additions, on peut changer l'ordre des termes ou regrouper plusieurs termes sans modifier le résultat.

**Exemple :**
$a + b + c = c + b + a = (c + a) + b = b + (a + c)$

#### b) Rôle de 0

La somme d'un nombre et de son opposé est égale à 0. Ainsi $a + (-a) = 0$.
On ne change pas la valeur d'un nombre en lui ajoutant 0. Ainsi $a + 0 = a$.

#### c) Soustractions

Pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé. Ainsi a-b = a+(-b).
On a souvent intérêt à remplacer les soustractions par des additions en utilisant cette propriété ; cela permet de changer l'ordre des termes.

**Exemple :**
$a - b = a + (-b) = (-b) + a$

### d) Opposé d'une somme

L'opposé d'une somme est la somme des opposés de chaque terme.
Ainsi $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
Cette propriété permet d'énoncer la règle des parenthèses pour les sommes algébriques.

> Dans une suite d'additions et de soustractions :
>
> - les parenthèses précédées du signe + peuvent être supprimées
>
> - les parenthèses précédées du signe – peuvent être supprimées à condition de remplacer chaque terme situé entre les parenthèses par son opposé.

**Exemple :**
$a - (b - c) + (d - e) = a - b + c + d - e$

## 2- Multiplications et divisions

### a) Suite de multiplications

Dans une suite de multiplications, on peut changer l'ordre des facteurs ou regrouper plusieurs facteurs sans modifier le résultat.

**Exemple :**
$abc = cba = (ca)b = b(ac)$

### b) Rôle de 1

Le produit d'un nombre non nul $a$ par son inverse $\frac{1}{a}$ est égal à 1. Ainsi $a\times\frac{1}{a}=1$ .

On ne change pas la valeur d'un nombre en le multipliant par 1. Ainsi $1a = a$.

### c) Division

Pour diviser par un nombre non nul il suffit de multiplier par son inverse. Ainsi $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ .