Equations à une inconnue

Résoudre l'équation f(x)=g(x) consiste à trouver tous les nombres réels qui ont même image par les fonctions f et g. Cela peut se faire graphiquement ou algébriquement.

A. Solutions d'une équation

Soient f et g deux fonctions. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à trouver **tous** les réels qui ont même image par f et g ; ces réels sont appelés solutions de l'équation.

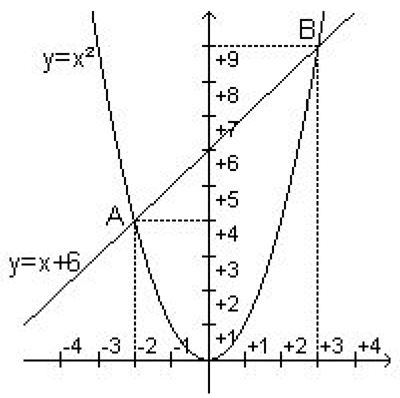
1- Interprétation graphique

Considérons les courbes C_f et C_g représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère. A chaque point d'intersection de ces deux courbes correspond une solution de l'équation $f(x) = g(x)$. En effet si un tel point a pour coordonnées (x, y), on a $y = f(x)$ car le point est sur la courbe C_f et $y = g(x)$ car le point est sur la courbe C_g .

Finalement, $y = f(x) = g(x)$, l'abscisse d'un tel point est donc une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Le nombre de solutions de l'équations $f(x) = g(x)$ est donc le nombre de points d'intersection des courbes C_f et C_g .

Exemple :



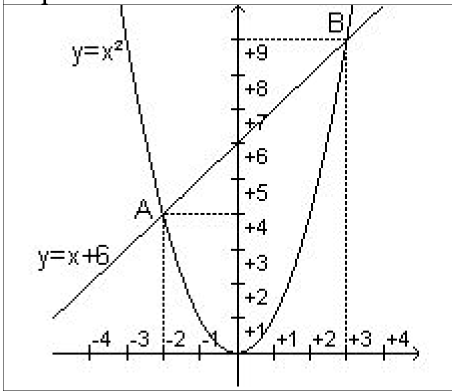
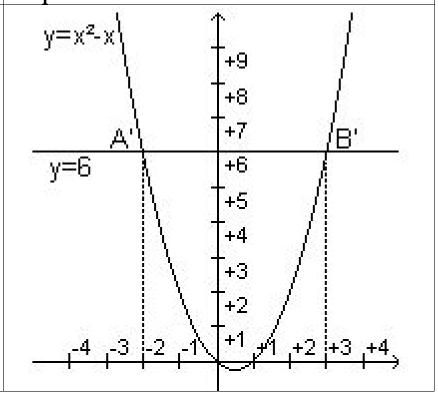
Considérons l'équation $x^2 = x + 6$.
La parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = x + 6$ se coupent aux points A(-2;4) et B(3;9).
L'équation a donc deux solutions qui sont –2 et 3.
On a bien :
$(-2)^2 = -2 + 6$ (on obtient 4 dans les deux membres)
et $3^2 = 3 + 6$ (on obtient 9 dans les deux membres).

2- Equations équivalentes

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Par exemple, les équations $x^2 = x + 6$ et $x^2 - x = 6$ sont équivalentes car elles ont les mêmes solutions $x = -2$ et $x = 3$.

Vérifions le en recherchant graphiquement les solutions de ces deux équations.

Equation $x^2 = x + 6$	Equation $x^2 - x = 6$
	

Propriété

> Une équation étant donnée, on obtient une équation équivalente :
> - en ajoutant une même expression dans les deux membres de l'équation
> - en multipliant les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Exemple

Considérons l'équation $x^2 = x + 6$ et ajoutons l'expression $-x$ dans les deux membres. On obtient : $x^2 - x = x + 6 - x$, soit $x^2 - x = 6$.
Les équations $x^2 = x + 6$ et $x^2 - x = 6$ sont donc équivalentes.

Remarque

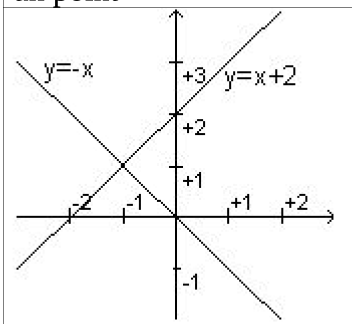
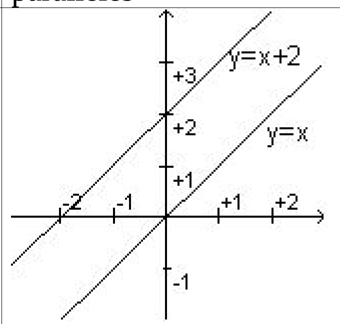
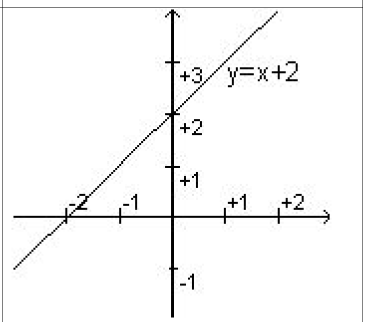
Le terme x du deuxième membre de l'équation $x^2 = x + 6$ est passé dans le premier membre de l'équation $x^2 - x = 6$ en changeant de signe.

B. Equations du premier degré

Les équations du premier degré sont les équations du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions affines.

1- Nombre de solutions

Si f et g sont des fonctions affines, leurs représentations graphiques sont des droites D_f et D_g.
Il existe donc trois possibilités :

D_f et D_g sont sécantes en un point	D_f et D_g sont strictement parallèles	D_f et D_g sont confondues
 Equation $x + 2 = -x$	 Equation $x + 2 = x$	 Equation $x + 2 = x + 2$
L'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique.	L'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solutions.	Tout réel x est solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

2- Résolution algébrique

Les équations du premier degré peuvent facilement être résolues de façon algébrique : on peut les transformer en équations équivalentes du type $ax = b$.

Si $a \neq 0$, elles ont une solution unique qui est $x = \dfrac{b}{a}$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, elles n'ont pas de solution.
Si $a = 0$ et $b = 0$, tout nombre réel x est solution.

Exemple

Résoudre l'équation $\dfrac{x}{2} - 1 = x + \dfrac{1}{3}$.
Commençons par réduire les deux membres au même dénominateur 6, on obtient :
$\dfrac{3x}{6} - \dfrac{6}{6} = \dfrac{6x}{6} + \dfrac{2}{6}$
Multiplions les deux membres de l'équation par 6, on obtient :
$3x - 6 = 6x + 2$
Ajoutons $-6x$ dans les deux membres, on obtient :
$3x - 6 - 6x = 6x + 2 - 6x$
Ce qui donne après réduction :
$-3x - 6 = 2$
Ajoutons 6 dans les deux membres, on obtient :
$-3x - 6 + 6 = 2 + 6$
Ce qui donne après réduction :
$-3x = 8$
La solution de cette équation est $x = \dfrac{8}{-3} = \dfrac{-8}{3}$.

C. Equations et factorisations.

1- Propriété

> Pour qu'un produit de facteurs soit égal à 0 il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit égal à 0.

Cette propriété permet de résoudre les équations équivalentes à un produit égal à 0.

Exemple
Résoudre l'équation $(2x + 3)(x - 5) = 0$.
Le produit $(2x + 3)(x - 5)$ ne peut être égal à 0 que si $2x + 3 = 0$ ou si $x - 5 = 0$.
Or :
$2x + 3 = 0$ pour $x = \dfrac{-3}{2}$
$x - 5 = 0$ pour $x = 5$
L'équation $(2x + 3)(x - 5)$ a donc deux solutions : $\dfrac{-3}{2}$ et 5.

2- Utiliser des factorisations

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $f(x) - g(x) = 0$.
En factorisant l'expression $f(x) - g(x)$ on se ramène au cas précédent : une équation sous forme de produit égal à 0.

Exemple
Résoudre l'équation $(x - 1)^2 = 9$.
Cette équation est équivalente à $(x - 1)^2 - 9 = 0$.
L'expression $(x - 1)^2 - 9$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x - 1$ et $b = 3$, on peut donc la factoriser en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
$(x - 1)^2 - 9 = (x - 1 + 3)(x - 1 - 3) = (x + 2)(x - 4)$.
L'équation $(x - 1)^2 - 9 = 0$ est donc équivalente à $(x + 2)(x - 4) = 0$.
Le produit $(x + 2)(x - 4)$ ne peut être égal à 0 que si $x + 2 = 0$ ou si $x - 4 = 0$.
Or :
$x + 2 = 0$ pour $x = -2$
$x - 4 = 0$ pour $x = 4$.
Finalement, l'équation $(x - 1)^2 = 9$ a deux solutions : -2 et 4.