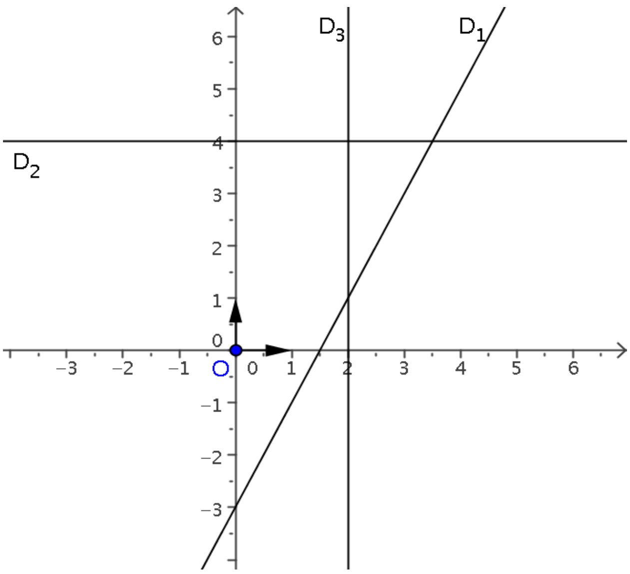
Equation d'une droite

A- Droites et équations

1- Définition

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient *a* et *b* deux réels.
L'ensemble des points *M*(*x*; *y*) tels que $y = ax + b$ forme une droite. Celle-ci est la représentation graphique de la fonction affine *f* qui à *x* associe $ax+b$, on dit que c'est la droite d'équation $y = ax + b$.
a est le coefficient directeur et *b* est l'ordonnée à l'origine.
Réciproquement :
- toute droite du plan qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, admet une équation du type
  $y = ax + b$.
- les droites parallèles à l'axe des ordonnées admettent une équation du type $x = c$.



Exemples :

Tracer les droites :
a) D_1 d'équation $y = 2x - 3$
b) D_2 d'équation $y = 4$
c) D_3 d'équation $x = 2$.

2- Propriétés

1- Si la droite D d'équation $y = ax+b$ passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le coefficient directeur *a* est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2- La droite D d'équation $y = ax+b$ est parallèle au vecteur $\vec{u}(1,\ a)$ qui est appelé vecteur directeur de la droite.

3- Les droites D et D' d'équations respectives $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, donc $a = a'$.

4- Dans un repère orthonormal, les droites D et D' d'équations respectives $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1, donc $aa' = -1$.

B- Recherche de l'équation d'une droite

Pour obtenir l'équation d'une droite :
1- on détermine son coefficient directeur en utilisant une propriété géométrique (deux points de la droite, parallélisme, orthogonalité)
2- on détermine son ordonnée à l'origine en utilisant un des points de la droite.

1- Exemple 1

Déterminer l'équation de la droite D passant par A(-2; 1) et B(3; -1).
Soit $y = ax+b$ l'équation de D.

Le coefficient directeur de D est $a = \frac{-1-1}{3+2} = \frac{-2}{5}$.

Comme D passe par A, on a $y_A = ax_A + b$, donc $1 = \frac{-2}{5} \times (-2) + b = \frac{4}{5} + b$.

On en déduit que $b = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

L'équation de D est donc $y = \frac{-2}{5}x + \frac{1}{5}$.

2- Exemple 2

Le plan est muni d'un repère orthnormal.
On considère le point A(-3; -2) et la droite D d'équation y = 2x – 1.
Déterminer l'équation de la droite D' perpendiculaire à D passant par A.
Soit $y = ax+b$ l'équation de D'.

Comme D et D' sont perpendiculaires, $2a = -1$, donc $a = \frac{-1}{2}$.

Comme D' passe par A, on a $y_A = ax_A + b$, donc $-2 = \frac{-1}{2} \times (-3) + b = \frac{3}{2} + b$.

On en déduit que $b = -2 - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2}$.

L'équation de D' est donc $y = \frac{-1}{2}x - \frac{7}{2}$.

C- Intersections de droites et systèmes d'équations

1- Equation à deux inconnues

Soient u, v et w trois réels avec u ou v non nul.
L'ensemble des couples (x, y) solutions de l'équation $ux + vy = w$ peut être représenté graphiquement par une droite.

Si $v = 0$, on a $ux = w$, donc $x = \frac{w}{u}$, équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Si $v \neq 0$, on a $y = \frac{-u}{v}x + \frac{w}{v}$, équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple

$2x + 3y = 5$ est équivalent à $3y = -2x + 5$, donc $y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ainsi, l'ensemble des couples (x, y) solutions de $2x + 3y = 5$ peut être représenté par la droire d'équation $y=\frac{-2}{3}x+\frac{5}{3}$

2- Système de deux équations à deux inconnues

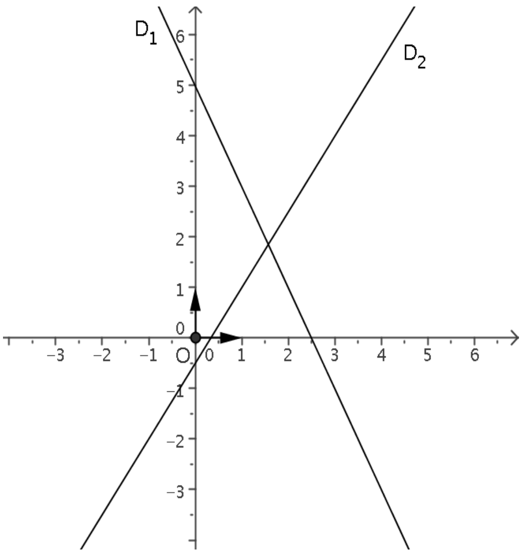
Résoudre le système d'équations $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, c'est trouver l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

Comme les solutions de chacune des deux équations peuvent être représentées par des droites, les solutions du système seront représentées par l'intersection des deux droites.

Trois cas sont possibles :

- les droites sont sécantes, le système admet un unique couple (x, y) comme solution.
- les droites sont strictement parallèles, le système n'a pas de solutions.
- les droites sont confondues (les deux équations sont alors équivalentes), le système a une infinité de solutions représentées par la droite.

Exemple



Considérons le système $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$.

L'équation $2x + y = 5$ est équivalente à $y = -2x + 5$.

L'équation $3x - 2y = 1$ est équivalente à $y = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Les droites D_1 d'équation $y = -2x + 5$ et D_2 d'équation $y = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ sont sécantes, les coordonnées du point d'intersection sont les solutions du système.

Graphiquement, les solutions sont donc $x \approx 1{,}6$ et $y \approx 1{,}9$.

3- Méthodes de résolution

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$.

Méthode de substitution

1) On exprime une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des deux équations
   Ici, la première équation nous donne $y = 5 - 2x$

2) On remplace cette inconnue par son expression dans l'autre équation.
   On obtient avec la deuxième équation $3x - 2(5 - 2x) = 1$ soit $7x - 10 = 1$

3) On résoud l'équation à une inconnue obtenue
   $7x - 10 = 1$ donc $x=\frac{11}{7}$.

4) On obtient l'autre inconnue en utilisant l'expression obtenue au 1)

$y = 5 - 2x = 5 - 2 \times \frac{11}{7} = 5 - \frac{22}{7} = \frac{13}{7}$.

5) Le système a donc une unique solution : $x = \frac{11}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$.

Méthode d'addition

1) On multiplie les deux équations par des nombres choisis pour que les coeeficients de x soient opposés; ici on multiplie la 1ère par 3 et la seconde par -2.

   On obtient le système $\begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$

2) On ajoute membre à membre les deux équations et on obtient *y*.

   Ici, $7y = 13$ d'où $y = \frac{13}{7}$.

3) On multiplie les deux équations par des nombres choisis pour que les coefficients de y soient opposés; ici on multiplie la 1ère par 2 et la seconde par 1.

   On obtient le système $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$.

4) On ajoute membre à membre les deux équations et on obtient *x*.

   Ici, $7x = 11$ d'où $x = \frac{11}{7}$.

5) Le système a donc une unique solution : $x = \frac{11}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$.