

# Développements

Effectuer un développement c'est transformer une expression donnée sous la forme d'un produit en une somme. Cette opération se réalise en utilisant la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

## A. Somme et produit de puissances de x

---

Il est essentiel de savoir ajouter et multiplier des expressions du type  $ax^n$  pour effectuer correctement des développements.

### 1- Somme dont les termes ont le même exposant

Lorsqu'une somme contient des termes de la forme  $ax^n$  et  $bx^n$ , on peut la réduire en utilisant la propriété :  $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$  qui est une application de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

#### Exemples

$$x + 2x - 5x = -2x, \quad 5x^2 + 2x^2 = 7x^2, \quad x^3 - 4x^3 = -3x^3$$

#### Remarque

Lorsqu'on ajoute deux puissances de x qui ont le **même** exposant, le résultat garde le même exposant, les coefficients s'ajoutent.

Mais **attention**, on ne peut pas réduire lorsque les exposants sont différents.

### 2- Produit de deux puissances de x

Pour multiplier deux termes de la forme  $ax^n$  et  $bx^n$ , on utilise la propriété :

$ax^n \times bx^n = abx^{n+p}$  qui est une application du produit de deux puissances. Les coefficients se multiplient, les exposants s'ajoutent.

#### Exemples

- $2x \times 3x = 6x^2$
- $-5x \times 3x^2 = -15x^3$
- $x^2 \times 3x^2 = 3x^4$
- $-2x^2 \times (-4x^3) = 8x^5$

## B. Produit de deux sommes

---

Lorsqu'il faut développer un produit dont au moins l'un des facteurs est une somme, on utilise la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

### 1- Distributivité de la multiplication sur l'addition

Quels que soient les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ ,  $a(b + c) = ab + ac$ .

#### Exemples

a)  $3(2x+1)=3 \times 2x+3 \times 1 =6x+3$

b)  $2x(3x-4)=2x \times 3x+2x \times (-4)=6x^2-8x$

Remarque : l'expression  $3x-4$  est considérée comme la somme de  $3x$  et de  $-4$  .

## 2- Application au produit de deux sommes

Quels que soient les nombres réels  $a, b, c$  et  $d$ ,  $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

On multiplie chaque terme du premier facteur par chaque terme du second facteur et on ajoute les résultats obtenus.

### Exemples

a)  $(x+3)(2x+5)=x \times 2x+x \times 5 + 3 \times 2x+3 \times 5 =2x^2+5x+6x+15 =2x^2+11x+15$

Remarque : on a réduit les termes en  $x$  .

b)  $(2x-1)(3x-5)=2x \times 3x+2x \times (-5)+(-1) \times 3x+(-1) \times (-5)$   
 $(2x-1)(3x-5)=6x^2-10x-3x+5 =6x^2-13x+5$

## 3- Produit de deux fonctions affines

Lorsqu'on effectue un produit du type  $(ax+b)(cx+d)$ , on obtient un résultat du type  $ux^2+vx+w$ .

Le terme en  $x^2$  est obtenu en multipliant les termes en  $x$  ( $ax$  et  $cx$ ).

Le terme constant est obtenu en multipliant les termes constants ( $b$  et  $d$ ).

Le terme en  $x$  est obtenu en ajoutant les produits d'un terme en  $x$  par un terme constant ( $ax$  par  $d$  et  $cx$  par  $b$ ).

Ainsi on peut calculer directement  $(x+4)(2x-3)$ .

Le terme en  $x^2$  est  $2x^2$  (multiplier  $x$  par  $2x$ ).

Le terme constant est  $-12$  (multiplier  $4$  par  $-3$ ).

Le terme en  $x$ , qui est la somme de  $8x$  (multiplier  $4$  par  $2x$ ) et de  $-3x$  (multiplier  $x$  par  $-3$ ), est  $5x$ .

Le résultat du calcul est donc :  $(x+4)(2x-3) = 2x^2+5x-12$ .

## C. Sommes et différences de produits

*On est parfois amené à ajouter ou à soustraire des produits de sommes. Chacun de ces produits représente alors un terme à ajouter ou à soustraire. Lorsqu'on voudra le remplacer par son développement, il sera nécessaire de rétablir des parenthèses pour bien montrer qu'il s'agit d'un seul terme.*

### Etude d'un exemple

Développer l'expression  $A=x(2x-3)-(x+2)(3x-1)$

Il s'agit de calculer la différence entre les termes  $x(2x-3)$  et  $(x+2)(3x-1)$  . On aurait pu écrire  $A=[x(2x-3)][(x+2)(3x-1)]$  , les crochets ont pu être enlevés à cause de la priorité de la multiplication sur les additions et les soustractions.

Le développement de  $x(2x-3)$  donne  $2x^2-3x$  .

Le développement de  $(x+2)(3x-1)$  donne  $3x^2+5x-2$  .

Lorsqu'on remplace dans les deux produits par leurs développements, la priorité de la multiplication sur l'addition ne peut plus s'appliquer pour montrer que l'on effectue une différence de deux termes, les crochets sous-entendus dans l'énoncé doivent être rétablis.

On obtient donc :

$$A = [2x^2 - 3x] - [3x^2 + 5x - 2]$$

Il reste à supprimer les crochets en appliquant la règle des parenthèses et à réduire.

$$A = 2x^2 - 3x - 3x^2 - 5x + 2 = -x^2 - 8x + 2$$