Coordonnées

A - Coordonnées de points et de vecteurs.

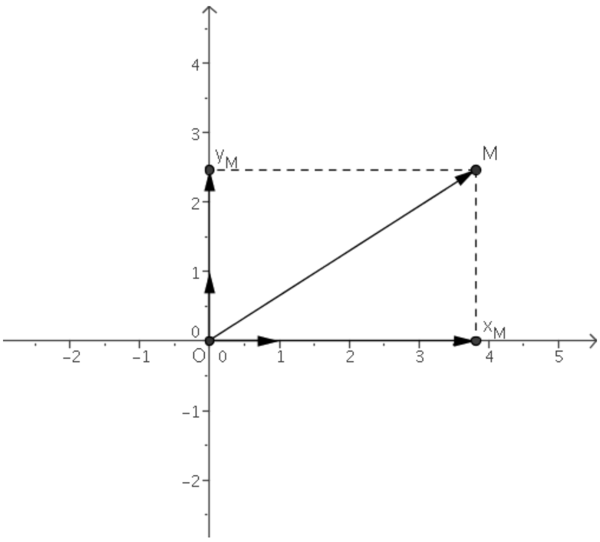
1. Repérage du plan

On considère un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.
On dit alors que $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère.
L'axe $(O;\vec{i})$ est appelé axe des abscisses (axe des x).
L'axe $(O;\vec{j})$ est appelé axe des ordonnées (axe des y).

Cas particuliers :
Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthogonal si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions orthogonales.
Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthogonormal si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions orthogonales et des longueurs égales à une unité.

On considère dans la suite que le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Coordonnées d'un point



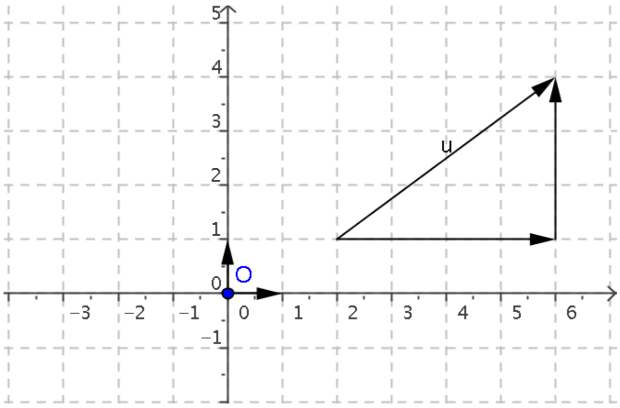
A tout point M on peut faire correspondre un unique couple de réels (x_M, y_M) tels que $\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}$.

Le couple (x_M, y_M) est le couple des coordonnées de M, on écrit $M(x_M, y_M)$.

Le réel x_M est l'abscisse de M.

Le réel y_M est l'ordonnée de M.

3. Coordonnées d'un vecteur



A tout vecteur $\vec{u}$ on peut faire correspondre un unique couple de réels (x, y) tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple (x, y) est le couple des coordonnées de $\vec{u}$, on écrit $\vec{u}$ (x, y).
Le réel x est l'abscisse de $\vec{u}$.
Le réel y est l'ordonnée de $\vec{u}$.

B - Propriétés générales

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Coordonnées et opérations sur les vecteurs

> On considère les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ ainsi que le réel k.
> Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{u}'$ sont $(x + x', y + y')$.
> Les coordonnées de $\vec{u}-\vec{u}'$ sont $(x - x', y - y')$.
> Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont (kx, ky).

Démonstration
$\vec{u}(x, y)$ signifie $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{u}'(x', y')$ signifie $\vec{u}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.
Alors, $\vec{u}+\vec{u}' = x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j} = (x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$;
$\vec{u}-\vec{u}' = x\vec{i}+y\vec{j}-(x'\vec{i}+y'\vec{j}) = x\vec{i}+y\vec{j}-x'\vec{i}-y'\vec{j} = (x-x')\vec{i}+(y-y')\vec{j}$;
$k\vec{u} = k(x\vec{i}+y\vec{j}) = kx\vec{i}+ky\vec{j}$.

2. Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

> On considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
> Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Démonstration
On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$; or $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}$;
on en déduit que $\overrightarrow{AB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}-x_A\vec{i}-y_A\vec{j}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$.

3. Coordonnées du milieu d'un segment

> On considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
>
> Les coordonnées du point M milieu de $[AB]$ sont $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.
>
> Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées de ses extrémités.

Démonstration
M est le milieu de $[AB]$ ⇔ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

En abscisse, cela se traduit par $x_M - x_A = x_B - x_M$, soit $2x_M = x_A + x_B$, donc $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$.

De même, en ordonnée, $y_M - y_A = y_B - y_M$, soit $2y_M = y_A + y_B$, donc $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

4. Vecteurs colinéaires

> Deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ sont colinéaires lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles, donc lorsque $xy' = x'y$.

Démonstration
Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que $\vec{u}'=k\vec{u}$, donc $x' = kx$ et $y' = ky$;
k est le coefficient de proportionnalité faisant passer de (x, y) à (x', y').
En appliquant la règle du produit en croix, on obtient $xy' = x'y$.

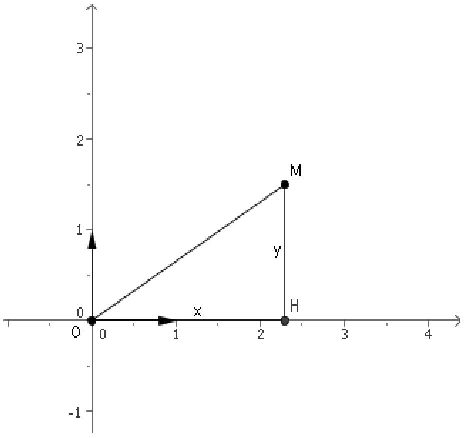
C - Distance et orthogonalité

Dans ce paragraphe le plan est muni d'un repère ***orthonormal*** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Norme d'un vecteur

> La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme du vecteur $\vec{u}$ et notée $\|\vec{u}\|$.
> Pour tout vecteur $\vec{u}(x,y)$, on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Démonstration



Considérons le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
On a $M(x, y)$ et $\|\vec{u}\|$ = OM.
Soit $H(x, 0)$.
Comme le repère est orthogonal, le triangle OHM est rectangle en H, donc $OM^2 = OH^2 + HM^2$.
Comme le repère est orthonormal, on a $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$, donc $OH = |x|$ et $HM = |y|$.
Ainsi $OM^2 = x^2 + y^2$, d'où $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Distance entre deux points

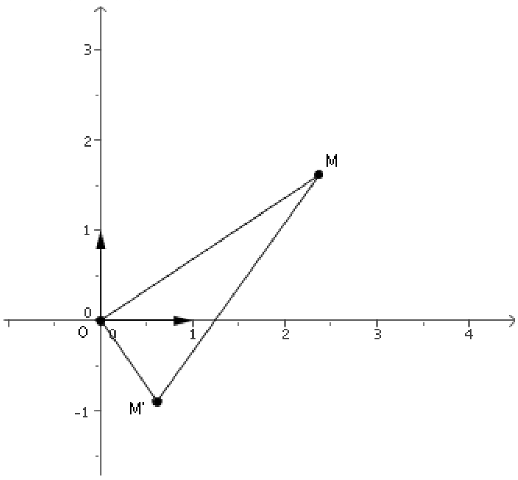
On considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B\text{-}x_A, y_B\text{-}y_A)$.

> La norme de $\overrightarrow{AB}$ est aussi la distance AB, d'où AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

3. Vecteurs orthogonaux

> Les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{u}'(x',y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Démonstration



Considérons le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et le point M' tel que $\overrightarrow{OM}'=\vec{u}'$.
$\vec{u}(x,y)$ et $\vec{u}'(x',y')$ sont orthogonaux si et seulement si OMM' est un triangle rectangle en O, soit $MM'^2 = OM^2 + OM'^2$.
Or, $OM^2 = x^2 + y^2$, $OM'^2 = x'^2 + y'^2$
et $MM'^2 = (x' - x)^2 + (y - y')^2$.
Cela nous donne :
$(x' - x)^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$, soit
$x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$
et en simplifiant,
$-2xx' - 2yy' = 0$, d'où $xx' + yy' = 0$.