Fonctions affines

A. Reconnaître les fonctions affines

1- Définition

Une fonction f définie sur ℝ est une fonction affine s'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
Pour calculer l'image d'un réel x, il suffit donc de multiplier x par le coefficient a, puis d'ajouter la constante b.

Exemples :

1. soit f définie par $f(x) = 2x - 5$; $f(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec a=2 et b=-5, c'est donc une fonction affine.
2. soit g définie par $g(x) = -x + 2$; on a $g(x) = -1x + 2$, $g(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec a=-1 et b=2, c'est donc une fonction affine.
3. soit h définie par $h(x)=\frac{x}{2}$; on a $h(x)=\frac{1}{2}x+0$, $h(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec a=1/2 et b=0, c'est donc une fonction affine.

2- Représentation graphique d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
La représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère est une droite. Cette droite est appelée droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque
Comme la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, il suffit de construire deux points pour la tracer. Pour éviter des erreurs il est cependant conseillé de construire un troisième point qui permet d'effectuer une vérification.

Exemples

La figure donne les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par :

$f(x)=\frac{x}{2}+1$ et $g(x) = –x – 1$

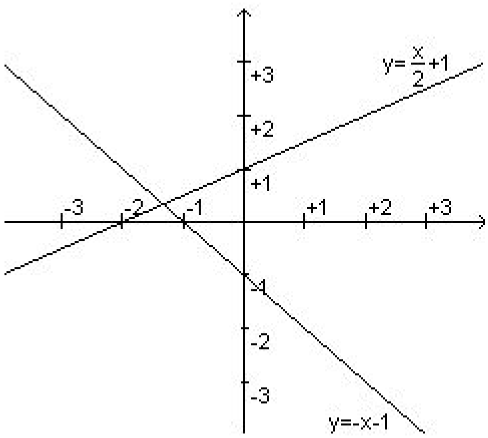


Tableau de valeurs utilisé :

x	-2	0	2
$f(x)$	0	1	2
$g(x)$	1	-1	-3

3- Cas particuliers

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Lorsque l'un des deux paramètres a et b est égal à 0, on obtient une fonction affine particulière.
Si $a = 0$, on a $f(x) = b$. La fonction f est alors appelée fonction constante, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses du repère (horizontale).
Si $b = 0$, on a $f(x) = ax$. La fonction f est alors appelée fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère. Les fonctions linéaires permettent de décrire les situations de proportionnalité, le paramètre a est alors le coefficient de proportionnalité.

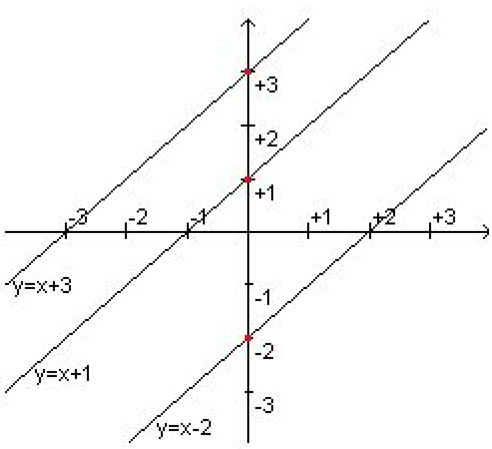
B. Détermination des paramètres

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Nous allons voir comment interpréter graphiquement les paramètres a et b.

1- Ordonnée à l'origine

Comme $f(0) = a \times 0 + b = b$, la droite représentant graphiquement la fonction f passe par le point de coordonnées $(0, b)$. C'est en ce point qu'elle coupe l'axe des ordonnées et c'est pourquoi on appelle le paramètre b ordonnée à l'origine.

Exemples



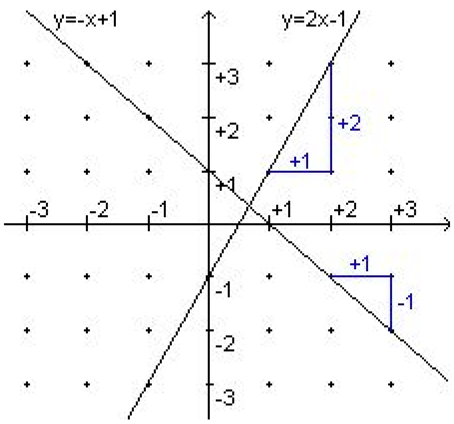
Si $f(x) = ax + b$, l'ordonnée à l'origine b permet de déterminer le point d'intersection de la droite représentation graphique de f avec l'axe des ordonnées.

2- Coefficient directeur

On a $f(x+1) = a(x + 1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$.
Soit finalement : $f(x + 1) = f(x) + a$.

Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : à chaque fois que l'on augmente x d'une unité, on augmente $f(x)$ de a unités.
Cette propriété permet de définir la direction que prend la droite d'équation $y = ax + b$, c'est pourquoi le paramètre a est appelé coefficient directeur.

Exemples



La figure donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :
$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 1$.
Sur la droite d'équation $y = 2x - 1$, lorsqu'on s'écarte d'une unité parallèlement à l'axe des abscisses, on doit se déplacer de 2 unités parallèlement à l'axe des ordonnées pour revenir sur la droite ; 2 est le coefficient directeur.
Sur la droite d'équation $y = -x + 1$, lorsqu'on s'écarte d'une unité parallèlement à l'axe des abscisses, on doit se déplacer de -1 unité parallèlement à l'axe des ordonnées pour revenir sur la droite ; -1 est le coefficient directeur.

C. Signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

1- Variations de f

Si a est positif, la fonction f est croissante, la droite représentation graphique de f « monte ».

Démonstration
Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 < ax_2$ (l'ordre n'est pas modifié car on a multiplié par un nombre positif), donc $ax_1 + b < ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) < f(x_2)$; la fonction f conserve l'ordre des nombres.

Si a est négatif, la fonction f est décroissante, la droite représentation graphique de f «descend».

Démonstration
Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 > ax_2$ (l'ordre est modifié car on a multiplié par un nombre négatif), donc $ax_1 + b > ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) > f(x_2)$; la fonction f inverse l'ordre des nombres.

2- Equation ax + b = 0

L'équation $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) a une solution unique qui est $x = \frac{-b}{a}$.

Cela signifie que la droite d'équation $y = ax + b$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{-b}{a} ; 0\right)$.

3- Signe de ax + b

On distingue deux cas.
Si *a* est positif, la fonction f est croissante, les valeurs de $f(x)$ vont donc évoluer du négatif vers le positif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Si *a* est négatif, la fonction *f* est décroissante, les valeurs de $f(x)$ vont donc évoluer du positif vers le négatif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	