Oscilloscopes

(Bac S, Polynésie, juin 2004)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement, ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

> On a $p(X > 10) = 1 - p(X \leqslant 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{10} = 1 - (-e^{-10\lambda} + 1) = e^{-10\lambda}$.
>
> Alors $p(X > 10) = 0{,}286 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0{,}276 \Leftrightarrow -10\lambda = \ln(0{,}286) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(0{,}286)}{-10} \approx 0{,}125$.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

> La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois est $p(X < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{0{,}5} = 1 - e^{-0{,}125 \times 0{,}5} \approx 0{,}061$.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

> Comme X suit la loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 8 ans est égale à la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 2 ans, soit
>
> $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - \int_0^{2} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{2} = e^{-0{,}25} \approx 0{,}779$.
>
> *Autre solution :* en utilisant des probabilités conditionnelles
>
> On doit calculer $p_{X>8}(X > 10)$. Comme l'intersection des évènements $X > 8$ et $X > 10$ est l'évènement $X > 10$, $p_{X>8}(X > 10) = \dfrac{p(X>10)}{p(X>8)}$. Or $p(X > 10) = e^{-10\lambda}$ et $p(X > 8) = e^{-8\lambda}$. On a donc bien $p_{X>8}(X > 10) = \dfrac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}25} \approx 0{,}779$.

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

> On a un schéma de Bernouilli avec comme succès le fait qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans et 15 répétitions. Si on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre d'oscilloscopes ayant une durée de vie supérieure à 10 ans, Y suit la loi binomiale de paramètres $(15;\ p(X>10))$.
>
> Or $p(X > 10) \approx 0{,}286$.
>
> La probabilité cherchée est donc
>
> $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0{,}286)^{15} = 1 - 0{,}714^{15} \approx 0{,}994$.

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

> Soit n le nombre d'oscilloscopes. Alors $P(Y \geqslant 1) = 1 - 0{,}714^n$.
>
> $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - 0{,}714^n \geqslant 0{,}999 \Leftrightarrow 0{,}714^n \leqslant 0{,}001 \Leftrightarrow n.\ln(0{,}714) \leqslant \ln(0{,}001)$
>
> $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}714)}$. Comme $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}714)} \approx 20{,}5$, il faudra acheter 21 oscilloscopes pour qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans avec une probabilité supérieure à 0,999.