Bombelli

Au XVI^{ème} siècle, des mathématiciens italiens de la Renaissance travaillèrent sur le résolution des équations du troisième degré.

A. Formule de Cardan

En 1545, Jérôme Cardan publie l'Ars Magna dans lequel il fournit des formules de résolution d'une équation de la forme $x^3 = px + q$ avec p et q entiers positifs.

Il développe des méthodes empruntées à Nicolo Tartaglia et découvre que :

si $27q^2 - 4p^3 \geqslant 0$, alors le réel positif $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}}$ est une solution de l'équation.

Exemple : utiliser la formule de Cardan pour résoudre $x^3 = 6\mathrm{x} + 9$.

On a $\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27} = \frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2$. Ceci nous donne avec la formule de Cardan :
$\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

Ayant trouvé la solution 3, on factorise par $x^3 - 6x - 9$ par $x - 3$, ce qui donne $x^3 - 6x - 9 = (x-3)(x^2 + 3x + 3)$. Le trinôme $x^2 + 3x + 3$ n'a pas de solutions, 3 est donc la seule solution.

B. Audace de Bombelli

Bombelli applique la formule aux cas où $27q^2 - 4p^3 \leqslant 0$, ce qui fait apparaître des racines carrées de nombres négatifs. Il introduit un nombre (*più di meno*) dont le carré est égal à -1. Ce nombre sera plus tard noté ***i*** par Euler.

Il effectue ses calculs en utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1.

Exemple : utiliser la formule de Cardan pour résoudre $x^3 = 15x + 4$.

On a $\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27} = -121 = 121i^2 = (11i)^2$. On peut donc remplacer $\sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}}$ par $11i$. Ceci nous donne avec la formule de Cardan : $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.

On cherche alors des nombres dont les cubes sont $2 + 11i$ et $2 - 11i$. Or $(2+i)^3 = 2 + 11i$ et $(2-i)^3 = 2 - 11i$.

Ceci nous donne la solution $2 + i + 2 - i = 4$.

Ayant trouvé la solution 4, on factorise par $x^3 - 15x - 4$ par $x - 4$, ce qui donne $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$. La résolution de $x^2 + 4x + 1 = 0$ nous fournit alors deux nouvelles solutions qui sont $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$.

Le nombre ***i*** est intervenu dans les calculs intermédiaires mais pas dans le résultat; il a été appelé nombre imaginaire par Descartes.

C. Trouver la formule de Cardan

Résoudre $x^3 + px + q = 0$.

Posons $x = u + v$ et développons l'expression obtenue en imposant la condition $3uv = -p$. L'équation prend alors la forme système équivalente :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = \dfrac{-p^3}{27} \end{cases}$$

On est ainsi ramené à rechercher 2 nombres dont on connait la somme et le produit ce qui est un problème du second degré.

Note : on passe de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à $X^3 + pX + q = 0$ en divisant par a et en faisant le changement de variable $X = x - \dfrac{b}{3a}$.