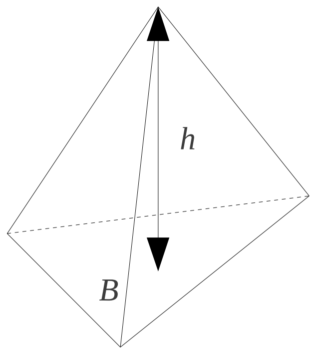
Volume d'un tétraèdre

Rappel



Le volume d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

La base est l'une des 4 faces triangulaires.
La hauteur est la distance entre le sommet qui n'est pas sur la base et la base ; la hauteur est donc la longueur du segment joignant le sommet qui n'est pas sur la base à sa projection orthogonale sur la base.

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

A(2 ; 4 ; 2), B(-4 ; 1 ; 2), C(0 ; 3 ; 8) et D(2 ; -1 ; 6).

On se propose de calculer le volume du tétraèdre ABCD.

1- Vérifier que les points B, C et D définissent un plan.

2- Soit H(-1 ; 1 ; 5). On veut montrer que H est la projection orthogonale de A dans le plan (BCD) ; pour cela :
a) Montrer que H est un point du plan (BCD).
b) Montrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

3- Soit I le milieu de [CD]. Montrer que les droites (BI) et (CD) sont perpendiculaires, puis calculer l'aire du triangle BCD.

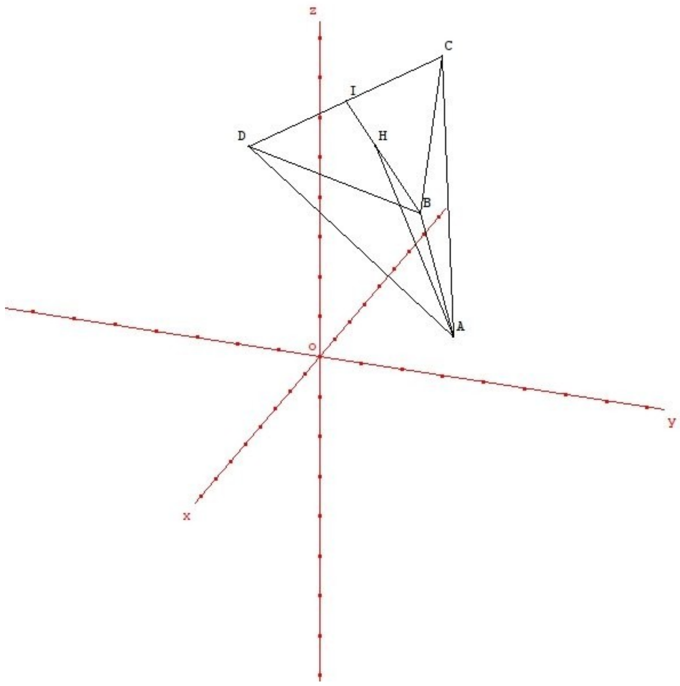
4- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Volume d'un tétraèdre

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

A(2 ; 4 ; 2), B(-4 ; 1 ; 2), C(0 ; 3 ; 8) et D(2 ; -1 ; 6).

On se propose de calculer le volume du tétraèdre ABCD.



1- Vérifier que les points B, C et D définissent un plan.

> On a $\overrightarrow{BC}$ (4, 2, 6) et $\overrightarrow{BD}$ (6, -2, 4). S'l existait un réel k tel que $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BC}$ on aurait à la fois $4k = 6$ et $2k = -2$; k devrait être égal à la fois à 1,5 et à -1 ce qui est impossible. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont donc pas colinéaires, ce qui montre que les points B, C et D définissent bien un plan.

2- Soit H(-1 ; 1 ; 5). On veut montrer que H est la projection orthogonale de A dans le plan (BCD) ; pour cela :

a) Montrer que H est un point du plan (BCD).a droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

b) Montrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

> a) Cherchons deux réels k et l tels que $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}+l\overrightarrow{BD}$. On a $\overrightarrow{BH}$ (3 ; 0 ; 3). D'où :
>
> $$\begin{cases} 3=4k+6l \\ 0=2k-2l \\ 3=6k+4l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=10l \\ k=l \\ 3=10l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{3}{10} \\ l=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$. Ainsi $\overrightarrow{BH}=\dfrac{3}{10}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{BD}$.
>
> Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires, le point H appartient donc au plan (BCD).
>
> b) On a $\overrightarrow{AH}$ (-3 ; -3 ; 3). Ainsi :
>
> $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$ =-3 × 4 -3 × 2 + 3 × 6 = -12 – 6 + 18 = 0
>
> $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}$ =-3 × 6 -3 × (-2) + 3 × 4 = -18 + 6 + 12 = 0
>
> Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD). Cela montre que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

3- Soit I le milieu de [CD]. Montrer que les droites (BI) et (CD) sont perpendiculaires, puis calculer l'aire du triangle BCD.

> On a I(1 ; 1 ; 7) car les coordonnées de I sont les moyennes des coordonnées de C et D.
>
> D'où $\overrightarrow{BI}$ (5 ; 0 ; 5) et $\overrightarrow{CD}$ (2 ; - 4 ; -2).
>
> Alors $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CD}$ = 5 × 2 + 0 × (-4) + 5 × (-2) = 10 – 10 = 0. Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, donc (BI) ⊥ (CD).
>
> L'aire du triangle BCD est donc égale à $\frac{BI \times CD}{2}$.
>
> Or BI = $\sqrt{50}$ et CD = $\sqrt{24}$. On a donc Aire(BCD) = $\frac{\sqrt{50} \times \sqrt{24}}{2} = 10\sqrt{3}$.

4- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

> Pour calculer le volume de ABCD on choisit le triangle BCD comme base. Comme H est la projection de A sur (BCD), la hauteur est AH.
>
> Or AH = $\sqrt{27}$. Alors Volume(ABCD) = $\frac{1}{3}$ × Aire(BCD) × AH = $\frac{10\sqrt{3} \times \sqrt{27}}{3}$ = 30.