Deux méthodes pour une suite

I est l'intervalle [0,1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite u par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de u et sa convergence ?

c) Établir la relation $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite u.

d) Démontrer que la suite u est convergente.

e) Prouver que la limite l de la suite u vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode

On considère la suite v définie par $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a) Prouver que v est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

d) En déduire la convergence de la suite u et sa limite l.

Deux méthodes pour une suite

I est l'intervalle [0,1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

> On a $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}$. Comme 10 et $(x+4)^2$ sont positifs, il en va de même pour $f'(x)$.
>
> Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, on a le tableau de variation suivant :
>
> | x | 0 | | 1 |
> |---|---|---|---|
> | $f'(x)$ | | + | |
> | $f(x)$ | 1/2 | $\nearrow$ | 1 |
>
> Le tableau montre que si x appartient à I, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc $f(x)$ appartient aussi à I.

2. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

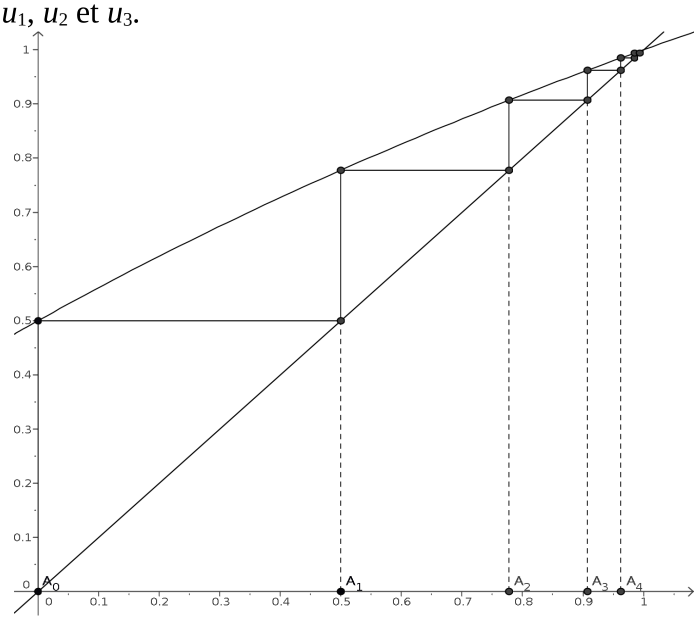
> Montrons que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I par récurrence.
>
> *Initialisation* : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 0$, donc u_0 appartient à I.
>
> *Hérédité* : Supposons que u_n appartient à I et montrons qu'alors u_{n+1} appartient aussi à I.
>
> Comme u_n appartient à I, la question 1 permet de dire que $f(u_n)$ appartient aussi à I.
>
> Or $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que u_{n+1} appartient à I.
>
> *Conclusion* : Ainsi, tout entier naturel n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite u par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.



Que suggère le graphique concernant le sens de variation de *u* et sa convergence ?

> La suite *u* semble être croissante et converger vers 1.

c) Établir la relation $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite *u*.

> $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$, or $(1-u_n)(u_n+2)=-u_n^2-u_n+2$, on a donc bien $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. Comme on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, $1-u_n$, u_n+2 et u_n+4 sont positifs, donc $u_{n+1}-u_n$ est positif et la suite *u* est croissante.

d) Démontrer que la suite *u* est convergente.

> La suite *u* est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite *l*.

e) Prouver que la limite *l* de la suite *u* vérifie $l = f(l)$ et calculer *l*.

> Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$. Or $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$ et $\lim f(u_n) = f(l)$ car *f* est continue. Finalement on a bien $l = f(l)$, soit $l=\frac{3l+2}{l+4}$. Cette équation est équivalente à $l^2+l-2=0$ qui a deux solutions $l_1 = 1$ et $l_2 = -2$. Comme les u_n sont tous positifs la limite *l* ne peut pas être -2, donc $l = 1$.

Deuxième méthode

On considère la suite *v* définie par $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a) Prouver que *v* est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

> $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{2u_n-2}{5u_n+10}=\frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}=\frac{2}{5}\frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{2}{5}v_n$, donc *v* est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de *n*.

> $v_0 = \frac{-1}{2}$ et $v_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ car la suite *v* est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de *n*.

> Comme $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$, on a $v_nu_n + 2v_n = u_n - 1$, donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$ et finalement $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$

d) En déduire la convergence de la suite *u* et sa limite *l*.

> Comme $-1<\frac{2}{5}<1$, $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim v_n = 0$.
>
> Comme $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$, $\lim u_n = \frac{-2\times 0-1}{0-1} = 1$.
>
> On retrouve bien le même résultat qu'avec la première méthode.