Position relative d'une courbe et d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$.

1- Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .

2- Soit C_f la courbe représentative de f.

a) Calculer les coordonnées du point A d'abscisse 1 de C_f.

b) Déterminer une équation de la droite T tangente à C_f en A.

3- Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite T.

(en appelant $g(x)$ la fonction affine représentée par T, on étudiera le signe de $d(x)=f(x)-g(x)$)

Position relative d'une courbe et d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$.

1- Calculer $f\,'(x)$ et en déduire les variations de f .

$f\,'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. $f\,'(x)$ est un trinôme du second degré qui admet deux racines -1 et 3. Comme le coefficient de x^2 est positif, $f\,'(x)$ est positif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. On peut construire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2- Soit C_f la courbe représentative de f.

a) Calculer les coordonnées du point A d'abscisse 1 de Cf.

b) Déterminer une équation de la droite T tangente à C_f en A.

a) L'ordonnée de A est $f(1) = -8/3$.

b) Une équation de T est donnée par $y = f\,'(1)(x - 1) + f(1)$.

Comme $f\,'(1) = -4$ et $f(1) = -8/3$, on obtient l'équation $y = -4x + 4/3$

3- Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite T.

(en appelant $g(x)$ la fonction affine représentée par T, on étudiera le signe de $d(x)=f(x)-g(x)$)

$$d(x)=(\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1)-(-4x+\frac{4}{3})=\frac{x^3}{3}-x^2+x-\frac{1}{3}$$

Pour étudier le signe de $d(x)$, on peut envisager deux méthodes : utiliser une factorisation ou étudier les variations de la fonction d.

Méthode 1

On remarque que $d(1) = 0$ car la courbe et la tangente passent par le point A d'abscisse 1. Cela donne l'idée de mettre $(x-1)$ en facteur, c'est à dire d'écrire $d(x)$ sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$.

Or $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Pour que cette expression soit égale à $d(x)$, il suffit que

$$\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b-a=-1 \\ c-b=1 \\ -c=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{2}{3} \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$$

On a donc $d(x)=(x-1)(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}(x-1)(x^2-2x+1)$

et comme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, $d(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$.

Ainsi, si $x > 1$, $d(x) > 0$, la courbe est au dessus de la tangente,

et si $x < 1$, $d(x) < 0$, la courbe est en dessous de la tangente.

Méthode 2

$d'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ donc $d'(x)$ est strictement positive pour $x>1$ et pour $x<1$. La fonction d est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $x < 1$ implique $d(x) < d(1)$, or $d(1)=0$, on trouve donc que si $x < 1$, alors $d(x) < 0$ et la courbe est en dessous de la tangente.

De même, $x > 1$ implique $d(x) > d(1)$, donc si $x > 1$, alors $d(x) > 0$ et la courbe est au dessus de la tangente.