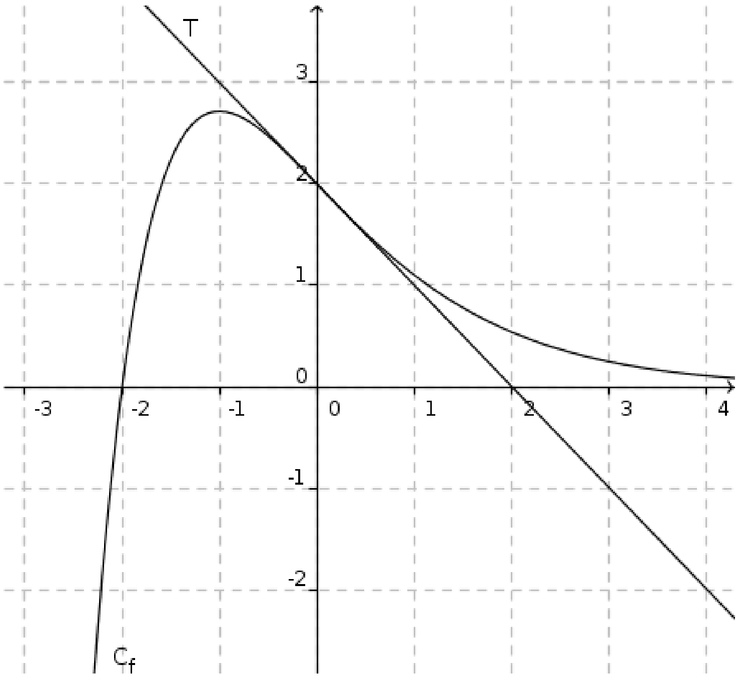
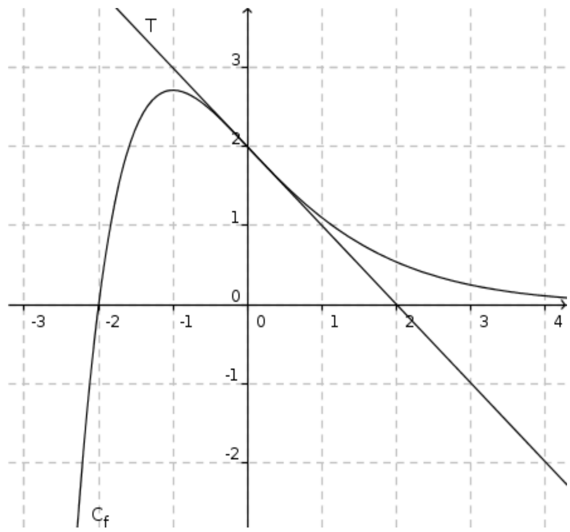
Exponentielle et tangente



a et b étant deux réels, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$.
La figure donne la courbe C_f, représentation graphique de f, ainsi que la droite T tangente à C_f en 0.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En utilisant le graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
3. En déduire les valeurs de a et b.
4. Etudier les variations et les limites de f.

Exponentielle et tangente



a et b étant deux réels, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$.
La figure donne la courbe C_f, représentation graphique de f, ainsi que la droite T tangente à C_f en 0.

1. Calculer $f'(x)$.

> f est de la forme uv, avec $u(x)=ax+b$, donc $u'(x)=a$, et $v(x)=e^{-x}$, donc $v'(x)=e^{-x} \times (-1) = -e^{-x}$.
>
> Comme $(uv)' = u'v + v'u$, on a :
>
> $f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b) = e^{-x}(-ax + a - b)$.

2. En utilisant le graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

> La courbe passe par le point (0, 2), donc $f(0) = 2$.
>
> Le coefficient directeur de la droite T, tangente en 0, est -1; on a donc $f'(0) = -1$.

3. En déduire les valeurs de a et b.

> Comme $f(0) = 2$, on a $(a \times 0 + b)e^{-0} = 2$, donc $b = 2$.
>
> Comme $f'(0) = -1$, on a $(-a \times 0 + a - b)e^{-0} = -1$, donc $a - b = -1$ et $a = 1$.
>
> Conclusion : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

4. Étudier les variations et les limites de f.

> $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$; comme une exponentielle est toujours positive $f'(x)$ a le même signe que $-x$- 1. D'où le tableau de variations :
>
> | x | $-\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $-x-1$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
> | $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
> | $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | e | $\searrow$ | 0 |
>
> En $-\infty$, $x + 2$ tend vers $-\infty$, et e^{-x} tend vers $+\infty$, on en déduit que $f(x)$ tend vers $-\infty$.
>
> En $+\infty$, $x + 2$ tend vers $+\infty$, et e^{-x} tend vers 0, on a une forme indéterminée mais l'exponentielle l'emporte, on en déduit que $f(x)$ tend vers 0.