Étude d'une fonction avec exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$. On appelle C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1- Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f.

2- Montrer que $f(x)=\frac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.

3- Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.

4- On appelle T la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.

5- Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (x + 2)$.

a) Vérifier que $d'(x)=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d.

b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f et T.

6- Tracer les asymptotes trouvées à la question 2, la tangente en 0 et la courbe C_f.

Étude d'une fonction avec exponentielle

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$. On appelle C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1- Calculer $f'(x)$, en déduire le sens de variation de f.

f est de la forme u/v avec $u(x) = 4e^x$ et $v(x) = e^x + 1$. On a donc

$f'(x)=\frac{4e^x(e^x+1)-e^x\times 4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$. Numérateur et dénominateur sont strictement positifs, donc $f'(x)$ est positif pour tout réel x. On en déduit que la fonction f est croissante sur ℝ.

2- Montrer que $f(x)=\frac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.

$f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$. En multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x}, on obtient :

$f(x)=\frac{4e^x\times e^{-x}}{(e^x+1)\times e^{-x}}=\frac{4e^0}{e^0+e^{-x}}=\frac{4}{1+e^{-x}}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0 et $f(x)$ tend donc vers 4.

Lorsque x tend vers $-\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$ et $f(x)$ tend donc vers 0.

On a donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = 4$ et $y = 0$.

3- Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4

4- On appelle T la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.

On a $f(0) = 4/2 = 2$ et $f'(0) = 4/2^2 = 1$.

T a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x + 2$.

5- Soit d la fonction définie sur ℝ par $d(x) = f(x) - (x + 2)$.

a) Vérifier que $d'(x)=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d.

Comme $d(x) = f(x) - (x + 2)$, $d'(x) = f'(x) - 1$, donc

$d'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$.

Comme les carrés sont positifs, $d'(x)$ est négatif et la fonction d est décroissante.

b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.

On a $d(0) = 0$ (le point d'abscisse 0 de la courbe est aussi le point d'abscisse 0 de la tangente)

Comme d est décroissante, elle inverse l'ordre. Si $x < 0$, alors $d(x) > d(0)$ donc $d(x) > 0$.
Si $x > 0$, alors $d(x) < d(0)$ donc $d(x) < 0$.

c) En déduire la position relative de C_f et T.

Lorsque $d(x) < 0$, donc lorsque $x > 0$, on a $f(x) < x + 2$, la courbe est sous la tangente.
Lorsque $d(x) > 0$, donc lorsque $x < 0$, on a $f(x) > x + 2$, la courbe est au dessus de la tangente.

6- Tracer les asymptotes trouvées à la question 2, la tangente en 0 et la courbe C_f.