Équation différentielle et étude d'une fonction

(*d'après Bac S Amérique du Nord, juin 2006*)

On s'intéresse aux fonctions f qui vérifient les deux conditions suivantes :
(1) f est une solution de l'équation différentielle $y' = 4 - y^2$
(2) $f(0) = 0$

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x)=2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et C_g sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a) Montrer que C_g admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   b) Étudier les variations de g sur $[0\ ;+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la droite T, tangente à C_g à l'origine.

4. Étudier les positions relatives de la droite Δ et de la courbe C_g , puis de la droite T et de la courbe C_g.

5. Tracer la courbe C_g ainsi que les éléments mis en évidence dans l'exercice.

Équation différentielle
et étude d'une fonction

(*d'après Bac S Amérique du Nord, juin 2006*)

On s'intéresse aux fonctions f qui vérifient les deux conditions suivantes :
(3) f est une solution de l'équation différentielle $y' = 4 - y^2$
(4) $f(0) = 0$

Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞[par $g(x)=2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et C_g sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

> D'une part $g'(x)=2\frac{4e^{4x}(e^{4x}+1)-4e^{4x}(e^{4x}-1)}{(e^{4x}+1)^2}=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$.
> D'autre part $4-(g(x))^2=4-4\frac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}=4\frac{(e^{4x}+1)^2-(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$.
> On a donc $g'(x)=4-(g(x))^2$, ce qui montre que g vérifie la condition (1).
> Enfin $g(0)=2\frac{e^0-1}{e^0+1}=0$, ce qui montre que g vérifie la condition (2).

2. a) Montrer que C_g admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

> On cherche la limite de g(x) en +∞. Pour cela effectuons la transformation suivante :
> $g(x)=2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}=2\frac{e^{4x}(1-e^{-4x})}{e^{4x}(1+e^{-4x})}=2\frac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$. Comme lorsque x tend vers +∞, e^{-4x} tend vers 0, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$. La droite Δ d'équation y = 2 est donc une asymptote à la courbe C_g.

b) Étudier les variations de g sur [0 ; +∞[.

> Comme $g'(x)=\frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$, on a g'(x) > 0 car une exponentielle est toujours positive. On en déduit que la fonction g est croissante sur [0 ; +∞[.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la droite T, tangente à C_g à l'origine.

> On a $g(0) = 0$ et $g'(0)=\frac{16e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{16}{4}=4$. On en déduit que l'équation de T est :
> $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$, soit $y = 4x$.
> Les coordonnées du point d'intersection de Δ et T vérifient y = 2 et y = 4x, on a donc 4x = 2, d'où $x=\frac{1}{2}$. Ainsi $\alpha=\frac{1}{2}$.

4. Étudier les positions relatives de la droite Δ et de la courbe C_g , puis de la droite T et de la courbe C_g.

Pour étudier la position relative de la droite Δ et de la courbe C_g , étudions le signe de $d_1(x) = 2 - g(x)$.

$d_1(x)=2-2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}=\frac{2e^{4x}+2-2e^{4x}+2}{e^{4x}+1}=\frac{4}{e^{4x}+1}$. On voit que $d_1(x) > 0$, donc que $2 - g(x) > 0$, soit $2 > g(x)$. La droite Δ est au dessus de la courbe C_g.

Pour étudier la position relative de la droite T et de la courbe C_g , étudions le signe de $d_2(x) = 4x - g(x)$.

On a $d_2'(x) = 4 - g'(x)$. Or $g'(x)=4-(g(x))^2$, on en déduit que $d_2'(x)=(g(x))^2$, donc que $d_2'(x)$ est positif sur [0 ; +∞[. La fonction d2 est donc croissante, et comme $d_2(0) = 0$, on a pour tout x > 0, $d_2(x) > 0$, soit $4x > g(x)$. La droite T est au dessus de la courbe C_g.

5. Tracer la courbe C_g ainsi que les éléments mis en évidence dans l'exercice.