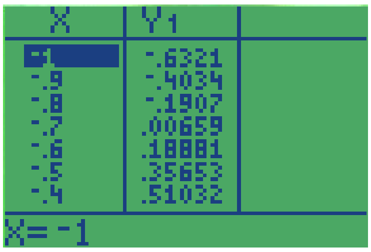
Encadrement par balayage

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^x - x^2$.

a) Démontrer que dans l'intervalle [-1 ; 0] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Avec la calculatrice, on a dressé ci-contre la table de valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [-1 ; 0] avec le pas 0,1.
En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.



c) Dresser ensuite la table des valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [-0,8 ; -0,7] avec le pas 0,01. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) Poursuivre ce procédé afin d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.

Encadrement par balayage

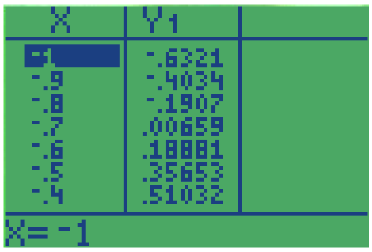
f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^x - x^2$.

a) Démontrer que dans l'intervalle [-1 ; 0] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

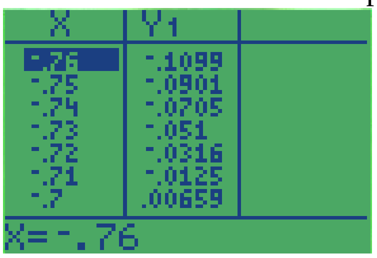
> *f* est dérivable car c'est la différence de deux fonctions dérivables, sa dérivée est $f'(x) = e^x - 2x$. Dans [-1 ; 0] *x* est négatif, donc $-2x$ est positif. Comme de plus e^x est positif, on a $f'(x) > 0$ si *x* est dans [-1 ; 0].
> Enfin remarquons que $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ et $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$.
> Alors :
> - la fonction *f* est continue dans [-1 ; 0], car elle est dérivable ;
> - la fonction *f* est strictement croissante dans [-1 ; 0], car $f'(x) > 0$;
> - le fonction *f* change de signe dans [-1 ; 0], car $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$
> Nous pouvons en déduire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions monotones, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans [-1 ; 0].

b) Avec la calculatrice, on a dressé ci-contre la table de valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [-1 ; 0] avec le pas 0,1.
En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

> On constate que $f(-0{,}8) < 0$ et que $f(-0{,}7) > 0$.
> On en déduit que $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$



c) Dresser ensuite la table des valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle [-0,8 ; -0,7] avec le pas 0,01. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.



> La table des valeurs de $f(x)$ montre que :
> $f(-0{,}71) < 0$ et $f(-0{,}7) > 0$
> On en déduit que $-0{,}71 < \alpha < -0{,}7$.

d) Poursuivre ce procédé afin d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-4}.

> En continuant de la même façon on trouve :
>
> $f(-0{,}704) < 0$ et $f(-0{,}703) > 0$, donc $-0{,}704 < \alpha < -0{,}703$
> puis
> $f(-0{,}7035) < 0$ et $f(-0{,}7034) > 0$, donc $-0{,}7035 < \alpha < -0{,}7034$.