# Nombres complexes et géométrie

*(Exercice du Bac S - La Réunion 2006)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par $i$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$.
Écrire la solution sous forme algébrique.

2) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3) Soit A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$. Quelle est la nature du triangle ODB ?

4) Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i$ et $f = 1 + i$.
Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

5) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 2. Soit (C') le cercle de centre A' et de rayon 2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe $e'$ du point E'.
b) Démontrer que le point E' est un point du cercle (C').
c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6) Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.

# Nombres complexes et géométrie

*(Exercice du Bac S - La Réunion 2006)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par $i$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$.

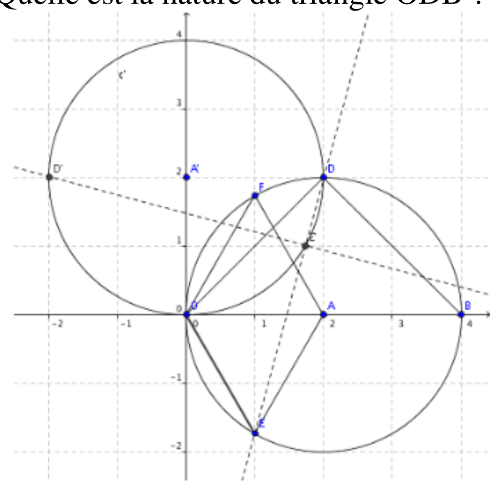
Écrire la solution sous forme algébrique.

> L'équation est définie pour $z \neq 0$. On a alors :
>
> $\frac{z-4}{z}=i \Leftrightarrow z-4=iz \Leftrightarrow z-iz=4 \Leftrightarrow z(1-i)=4 \Leftrightarrow z=\frac{4}{1-i}$.
>
> De plus $\frac{4}{1-i}=\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+4i}{2}=2+2i$.

2) Résoudre dans **C** l'équation $z^2-2z+4=0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

> Le discriminant est $\Delta = -12$. L'équation a donc deux racines complexes conjuguées $z_1$ et $z_2$.
>
> $z_1=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=\bar{z}_1=1-i\sqrt{3}$.
>
> Comme $|z_1|=2$, on a $z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=\bar{z}_1=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a=2$, $b=4$, $a'=2i$ et $d=2+2i$. Quelle est la nature du triangle ODB ?

> 
> 
>
> D'après la question 1, $\frac{d-b}{d}=i$, donc $d-b=id$. Comme $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, cela montre que O est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et donc que ODB est un triangle rectangle et isocèle en D.

4) Soient E et F les points d'affixes respectives $e=1-i$ et $f=1+i$.
Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

On peut remarquer que $e = z_2$ et $f = z_1$, donc $e=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $f=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que E est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et que F est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les triangles OAE et OAF sont donc équilatéraux et on a ainsi :

OF=FA=AE=EO, ce qui montre que OEAF est un losange.

5) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 2. Soit (C') le cercle de centre A' et de rayon 2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe $e'$ du point E'.

b) Démontrer que le point E' est un point du cercle (C').

c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

a) On a $z_{E'}=e^{i\frac{\pi}{2}}z_E=i(1-i\sqrt{3})=\sqrt{3}+i.$

b) A'E' = $|e' - a'| = |\sqrt{3} - i| = 2$, donc E' est un point de (C').

c) On a bien $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. Cela montre que E est l'image de E' par l'homothétie de centre D et de rapport $\sqrt{3} + 2$, et donc que E, E' et D sont alignés.

6) Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.

Comme D'=r(D) et E'=r(E), les droites (DE) et (D'E') sont perpendiculaires car r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Comme E, E' et D sont alignés cela signifie que (EE') et (D'E') sont perpendiculaires, donc que EE'D' est rectangle en E'.