Asymptote oblique

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.
a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal : unité 2cm.
a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de f.
c) Montrer que la droite D d'équation $y = x+3$ est asymptote à C en $-\infty$, puis étudier la position relative de C et D.
d) Tracer la courbe C et la droite D.

Asymptote oblique

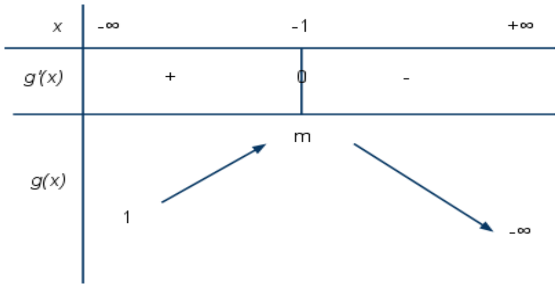
Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

> En $+\infty$, e^{2x} et $2xe^{2x}$ tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
>
> En $-\infty$ posons $X=2x$; alors $g(x) = 1- e^X - Xe^X$. Si x tend vers $-\infty$, alors X tend aussi vers $-\infty$; de plus e^X tend vers 0 et Xe^X tend vers 0. Finalement $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

> La fonction g est de la forme w - uv avec w$(x) = 1 - e^{2x}$, u$(x) = 2x$ et v$(x) = e^{2x}$. Comme les fonctions w, u et v sont dérivables, g est dérivable aussi et $g' =$ w' - u'v - v'u.
>
> w'$(x) = -2e^{2x}$, u'$(x) = 2$ et v'(x) = $2e^{2x}$.
>
> On en déduit que g'(x) = $-2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = e^{2x}(-4x - 4)$.
>
> Comme e^{2x} est positif, $g'(x)$ a le même signe que $-4x-4$, donc g'$(x) > 0$ pour $x<-1$ et g'$(x) < 0$ pour $x > -1$. On en déduit le tableau de variation suivant :
>
> 
>
>
> On a un maximum m = $g(-1) = 1 + e^{-2}$.

c) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

> $g(0) = 0$.
> Le tableau de variation montre que pour $x<0$, $g(x) >0$ et que pour $x>0$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal : unité 2cm.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

> Remarquons que $f(x) = x\left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right)$
>
> En $+\infty$: $1+\frac{3}{x}$ tend vers 1 et e^{2x} tend vers $+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
>
> En $-\infty$: $1+\frac{3}{x}+e^{2x}$ tend vers 1 donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de f.

> Calculons $f'(x)$. f est de la forme w-uv avec w$(x)=x+3$, u$(x)=x$ et v$(x)=e^{2x}$.
>
> On a donc f' =w'-u'v-uv' avec w'$(x)=1$, u'$(x)=1$ et v'$(x)=2e^{2x}$.

D'où: $f'(x) = 1 - 2xe^{2x} - e^{2x} = g(x)$.

Ainsi $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

Si $x<0$, $f'(x) > 0$ et f est croissante; si $x>0$, $f'(x)<0$ et f est décroissante.

On a un maximum en 0 qui est $f(0) = 3$.

c) Montrer que la droite D d'équation $y = x+3$ est asymptote à C en $-\infty$, puis étudier la position relative de C et D.

Posons $d(x) = f(x) - (x+3) = -xe^{2x}$.

- Cherchons la limite en $-\infty$: posons $X=2x$, alors $-xe^{2x} = -\frac{1}{2}Xe^{X}$. Lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $-\infty$, donc Xe^{X} tend vers 0. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$ et donc que D est asymptote à C en $-\infty$.

- Étudions le signe de $d(x) = -xe^{2x}$. Comme e^{2x} est positif, $d(x)$ a le signe de $-x$.

Si $x<0$, $d(x) > 0$, donc $f(x) > x+3$ et C est au dessus de D.

Si $x>0$, $d(x)<0$, donc $f(x) < x+3$ et C est en dessous de D.

d) Tracer la courbe C et la droite D.