Fonction exponentielle et asymptotes

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O.

1. Démontrer que *f* est une fonction impaire, c'est à dire que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Démontrer que pour tout réel x, $f(x)=x+1-\frac{2}{1+e^{-x}}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$?

3. a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}$.
b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
c) Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
d) Déterminer une équation de la droite Δ' asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

4. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

5. Déterminer une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ en 0.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 et les asymptotes Δ et Δ' .

Fonction exponentielle et asymptotes

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O.

1. Démontrer que *f* est une fonction impaire, c'est à dire que pour tout réel *x*, $f(-x) = -f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

> $$f(-x)+f(x)=-x+1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}+x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=2-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}-\frac{2e^x}{e^x+1}$$
>
> donc $f(-x)+f(x)=\dfrac{2+2e^x-2-2e^x}{e^x+1}=0$. On a donc bien $f(-x) = -f(x)$.
>
> Comme *f* est impaire, la courbe $\mathcal{C}$ admet le point O comme centre de symétrie.

2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

> Si *x* tend vers $-\infty$, alors x + 1 tend vers $-\infty$ et e^x tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b) Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x)=x+1-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ et en déduire la limite de *f* en $+\infty$?

> $$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+1-\frac{2e^x}{e^x(1+e^{-x})}=x+1-\frac{2}{1+e^{-x}}$$
>
> En $+\infty$, e^{-x} tend vers 0, donc $\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ tend vers 2 et $f(x)=x+1-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ tend vers $+\infty$.

3. a) Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$.

> $$f(x)-(x-1)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}-x+1=2-\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}=\frac{2}{e^x+1}$$

b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

> En $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$, donc $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ tend vers 0.
>
> Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$, la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

> Comme e^x est toujours positif, $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ est toujours positif; la courbe $\mathcal{C}$ se trouve donc au dessus de l'asymptote Δ.

d) Déterminer une équation de la droite Δ' asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

> On a $f(x)-(x+1)=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}$. En $-\infty$, e^x tend vers 0 donc $f(x) - (x + 1)$ tend 0. Cela montre

que la droite Δ' d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

D'autre part, comme $f(x)-(x+1)=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}$ est négatif, la courbe $\mathcal{C}$ se trouve en dessous de l'asymptote Δ'.

4. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

$$f'(x)=1-\frac{2e^x(e^x+1)-2e^x\times e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^{2x}-2e^x+2e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

Comme e^x est toujours positif, on a $f'(x) > 0$ pour tout réel x; la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}$ en 0.

L'équation réduite de T est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Comme $f'(0) = ½$ et $f(0) = 0$, on a finalement $y=\dfrac{1}{2}x$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ en 0 et les asymptotes Δ et Δ'.