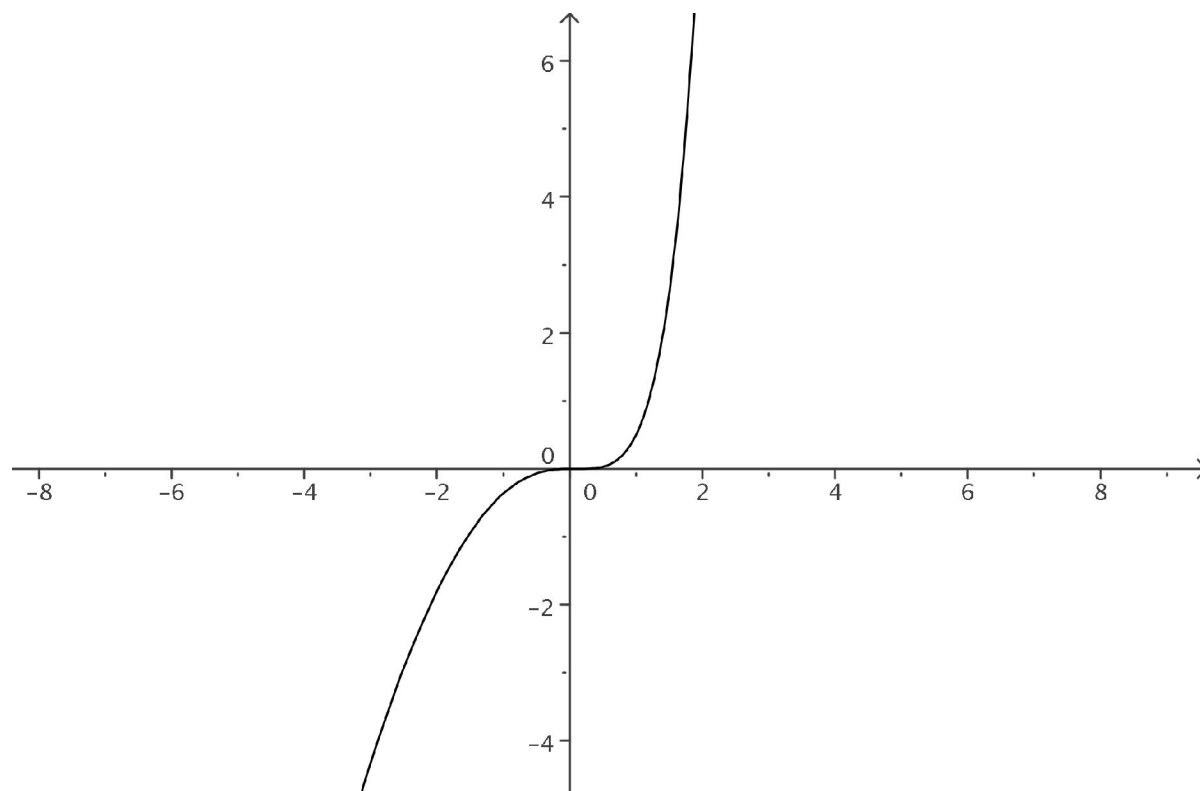


Devoir de Mathématiques

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

1. Le sens de variation de f sur $[-3; 2]$?
2. La position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A- Contrôle de la première conjecture.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$$

2. Etude du signe de $g(x)$ pour x réel

- a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
- b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
- c. En déduire les variations de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
- d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3. Sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f .
- Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B- Contrôle de la deuxième conjecture

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$$

- Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur $[0; 1]$.
 - En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe $(x'x)$.
b. Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C- Tracé de la courbe.

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de C correspondant à l'intervalle $[-0,2; 0,4]$, dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec les unités suivantes :

Sur l'axe $(y'y)$, 1cm représente 0,05.

Sur l'axe $(x'x)$, 1cm représente 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n.10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,20	-0,15	-0,10	-0,05	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Bac S Inde, avril 2003