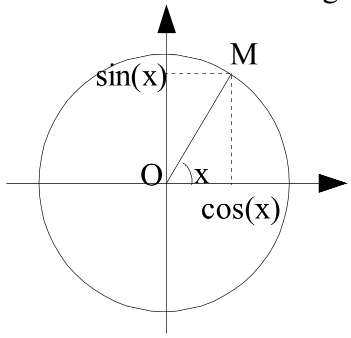
Fonctions trigonométriques

A. Définitions

1- Cosinus et sinus

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère le cercle trigonométrique, cercle de centre O et de rayon 1.



A tout réel x, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

On appelle alors cos*(x)* l'abscisse du point *M* et sin*(x)* l'ordonnée du point *M*.

Quelques valeurs remarquables :

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

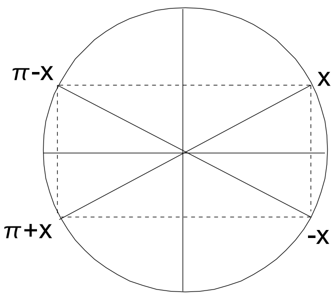
2- Propriétés

a) Conséquences immédiates

Quel que soit le réel x :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

b) Angles associés



La figure ci-contre permet de retrouver rapidement les formules suivantes :

- $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

D'autre part,

- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

- $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$

c) Sinus et cosinus d'une somme

Quels que soient les réels a et b :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

d) Formules de duplication

Quel que soit le réel x :

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

B. Étude des fonctions sinus et cosinus

1- Dérivabilité

a) Résultats préliminaires

On admet que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$.

Le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 est $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\sin(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$.

Le nombre dérivé de la fonction cosinus en 0 est $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-\cos(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$.

b) Dérivées de sinus et cosinus

La dérivée de la fonction sinus est $(\sin(x))' = \cos(x)$.

La dérivée de la fonction cosinus est $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Démonstration

Cherchons le nombre dérivé de la fonction sinus en x_0, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$.

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h}$$

donc

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}=\sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x_0)\sin\frac{(h)}{h} .$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{\cos(h)-1}{h}$ tend vers 0 et $\frac{\sin(h)}{h}$ tend vers 1. On en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}=\cos(x_0) .$$

Cela nous montre que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.

D'autre part, $\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, la dérivée de la fonction cosinus est donc la dérivée de la fonction $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, c'est à dire $\cos(\frac{\pi}{2}-x)\times(-1)=-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin(x)$.

2- Fonction sinus

La fonction sinus est :

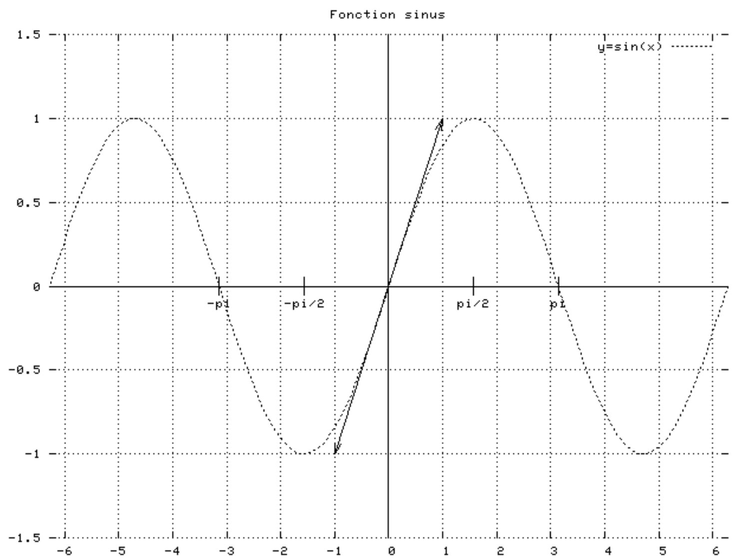
- périodique de période 2π, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- impaire, $\sin(-x) = - \sin(x)$

Sa dérivée est $\cos(x)$.

Construisons le tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$+\pi/2$		$+\pi$
$\cos(x)$		-	0	+	0	-	
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Sa courbe représentative est :



3- Fonction cosinus

La fonction cosinus est :

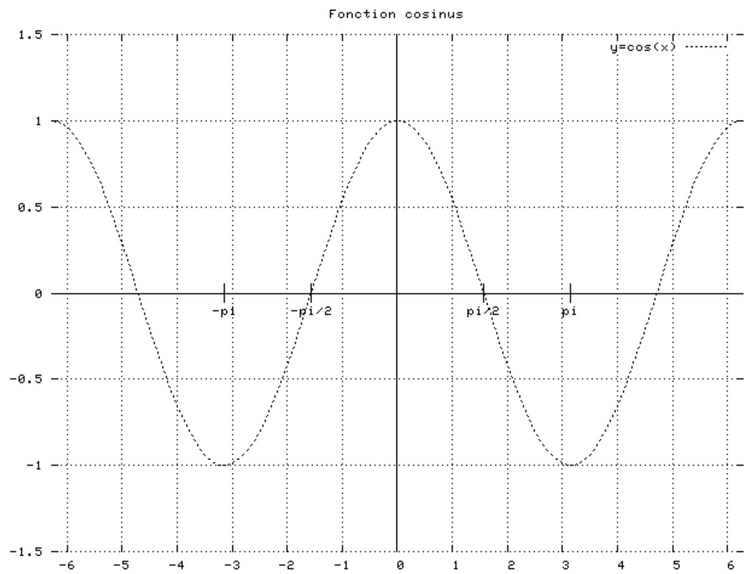
- périodique de période 2π, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- paire, $\cos(-x) = \cos(x)$

Sa dérivée est $-\sin(x)$.

Construisons le tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		0		$+\pi$
$-\sin(x)$	0	+	0	-	0
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

Sa courbe représentative est :



C. Fonction tangente

1- Définition

La fonction tangente, notée tan, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

En effet $\cos(x) \neq 0$ est équivalent à $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2- Périodicité et parité

Pour tout x de l'ensemble de définition de la fonction tangente :

- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$; la fonction tangente est périodique de période π.
- $\tan(-x) = -\tan(x)$; la fonction tangente est impaire.

3- Dérivée

La fonction tangente est dérivable en tout réel x de son ensemble de définition et

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

4- Tableau de variations sur $\left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

x	$-\pi/2$		$+\pi/2$
$1/\cos^2(x)$		$+$	
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les droites d'équations $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ sont des asymptotes verticales.

5- Courbe