Raisonnement par récurrence

A. Rappels sur les suites

1- Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
Si une suite est représentée par la lettre u, on note u_n l'image de n, appelée aussi terme d'indice n.
La suite entière est parfois représentée par (u_n).
On peut définir une suite :

- comme suite des valeurs d'une fonction f; pour tout entier n, on a $u_n = f(n)$.
  Exemple : $u_n=\frac{1}{n+1}$; on a alors $u_0=1$, $u_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$, etc...; chaque terme peut être calculé indépendamment des autres.
- par récurrence à partir d'une fonction f; on se donne u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$
  Exemple : $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}-1$ avec $u_0=2$; on a alors $u_1=\frac{u_0}{2}-1=\frac{2}{2}-1=0$,
  $u_2=\frac{u_1}{2}-1=\frac{0}{2}-1=-1$, $u_3=\frac{u_2}{2}-1=\frac{-1}{1}-1=-2$, etc...; chaque terme est calculé à partir du précédent.

2- Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

- Pour tout entier naturel n, on a alors $u_n=u_0+nr$.
- Pour tout entier naturel n, on a $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.
- Cas particulier : pour tout entier naturel n : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
  (il suffit de considérer la suite arithmétique de raison 1 commençant à 0)

3- Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n $u_{n+1}=q\cdot u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

- Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\cdot q^n$.
- Si $q\neq 1$, pour tout entier n, $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Cas particulier : si $q\neq 1$, pour tout entier n, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
  (il suffit de considérer la suite géométrique de raison q commençant à 1)

4- Comportement global d'une suite

a) Suites monotones

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
La suite (u_n) est croissante lorsque pour tout entier *n*, $u_n \leq u_{n+1}$.
La suite (u_n) est décroissante lorsque pour tout entier *n*, $u_n \geq u_{n+1}$.
La suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

b) Suites majorées, minorées, bornées.

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel *M* tel que pour tout entier *n*, $u_n \leq M$.
La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel *m* tel que pour tout entier *n*, $u_n \geq m$.
La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

B. Raisonnement par récurrence

> Soit P_n une propriété concernant un entier n.
>
> Pour démontrer que la propriété P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on démontre successivement que :
>
> - la propriété est vraie pour n_0;
> - si la propriété est vraie pour une valeur de n supérieure ou égale à n_0, alors elle est aussi vraie pour n+1.

On voit bien ainsi que la propriété est vraie pour n_0, donc qu'elle est vraie pour n_0+1, donc qu'elle est vraie pour n_0+2, etc ..., donc qu'elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Exemple de démonstration par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$. Montrer que pour tout entier *n*, $u_n \leq 3$, c'est à dire que la suite (u_n) est majorée par 3.

Etape 1 : amorcer la récurrence

Pour n=0, on a bien $u_0 \leq 3$ puisque $u_0=0$.

Etape 2 : passage de *n* à *n*+1

Supposons la propriété vraie pour un entier *n*, c'est à dire que $u_n \leq 3$ (c'est l'hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est encore vraie pour *n*+1, c'est à dire que $u_{n+1} \leq 3$.

Comme la propriété est vraie au rang *n*, on sait que $u_n \leq 3$. On en déduit que $u_n+6 \leq 9$. Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit alors que $\sqrt{u_n+6} \leq 3$, donc que $u_{n+1} \leq 3$.

Conclusion :

Pour tout entier *n*, $u_n \leq 3$.