Produit scalaire dans l'espace

A. Expressions du produit scalaire

1- Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Conséquences

- Si A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{u}-\vec{v}$, d'où l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

2- Formule du cosinus

Formule d'Al Kashi : pour tout triangle ABC, $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC})$.
(cette formule généralise le théorème de Pythagore qu'on retrouve lorsque $\widehat{BAC}$ est un angle droit.)

D'autre part, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$ donne $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

On en déduit :

Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC})$.

Conséquences

On considère trois points distincts A, B et C.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\cdot AC$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

3- Avec des coordonnées

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

Démonstration

Utiliser la définition et le fait que $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$.

4- Règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$,
et pour tout réel k, $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Démonstration

Utiliser l'expression analytique du produit scalaire.

5- Utiliser une projection

Si A, B et C sont trois points de l'espace avec $A \neq B$, et si H est la projection orthogonale de C sur (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.

Démonstration
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HC}$.
Comme $(AB) \perp (HC)$ on a $\vec{AB} \cdot \vec{HC} = 0$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.

B. Orthogonalité

1- Vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$ lorsque :
- soit l'un des deux vecteurs est nul
- soit il existe trois points A, B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ et ABC est rectangle en A.

Remarque : le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

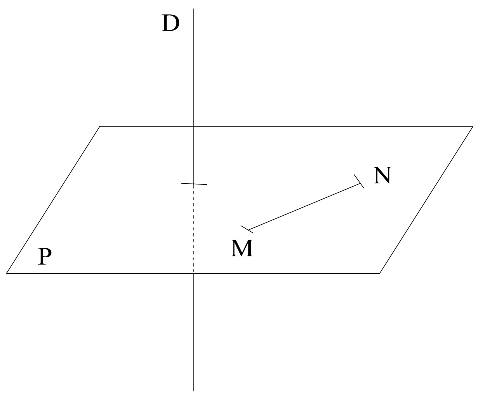
Propriété
$\vec{u} \perp \vec{v}$ est équivalent à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2- Droites orthogonales

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsqu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.
Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et coplanaires.

Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
(en effet des droites parallèles ont des vecteurs directeurs colinéaires et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}$)

3- Orthogonalité d'une droite et d'un plan



Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Soient D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, et P un plan.
Si D est orthogonale à P, alors pour tous points M et N de P $\vec{u} \cdot \vec{MN} = 0$.

Propriétés

1- Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.

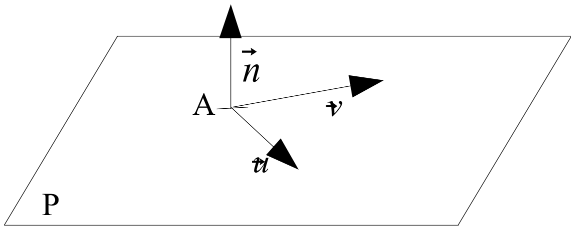
(en effet tout vecteur du plan peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs directeurs des droites sécantes et $\vec{u} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x\vec{u} \cdot \vec{i} + y\vec{u} \cdot \vec{j}$)

> 2- Si une droite D est orthogonale à un plan P, alors toute parallèle à D est aussi orthogonale à P.
>
> 3- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

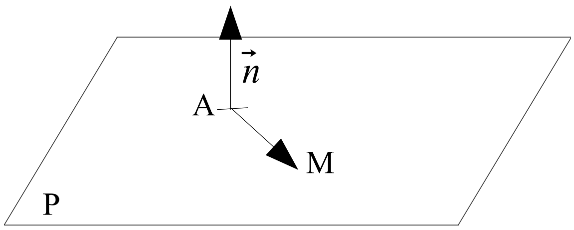
4- Vecteur normal à un plan

Etant donné un plan P, tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à P est appelé vecteur normal de P.

Propriétés



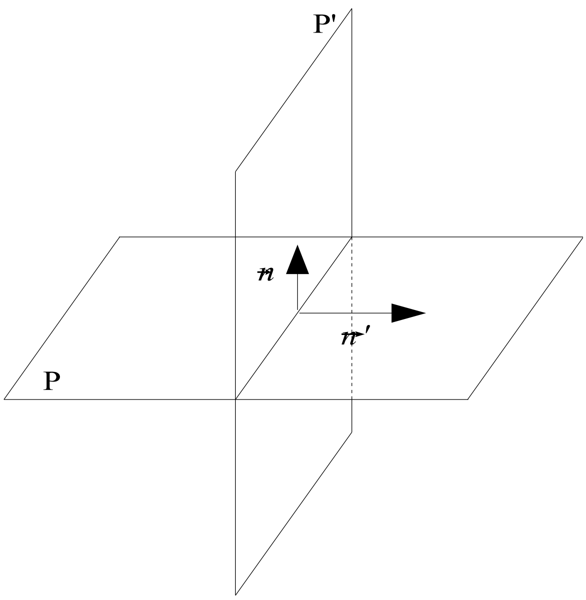
1- Pour qu'un vecteur $\vec{n}$ soit orthogonal à un plan P, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P.



2- Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Si D est la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A, alors P est le plan orthogonal à D passant par A.

5- Plans perpendiculaires



Deux plans sont perpendiculaires losrque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété
Deux plans perpendiculaires admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

6- Plan médiateur

Soients A et B deux points distincts. L'ensemble des points M de l'espace tels que $MA=MB$ (points équidistants de A et B) est un plan appelé plan médiateur de [AB]. Ce plan est orthogonal à la droite (AB) et passe par le milieu du segment [AB].

Démonstration

Comme MA et MB sont positifs, $MA=MB$ est équivalent à $MA^2 = MB^2$.

Or, $MA^2=MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MA}^2=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=0$.

Si I est le milieu de $[AB]$, on $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MI}$; d'autre part $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$.

Alors, $MA^2=MB^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par I.

C. Géométrie analytique

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- Rappels

- $\vec{u}(x,y,z)$ signifie $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- $A(x_A,y_A,z_A)$ signifie $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}$
- Pour $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$, on a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.
- Pour $\vec{u}(x,y,z)$, on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Pour tous points A, B et C, $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$.
- $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $xx'+yy'+zz'=0$

2- Equation cartésienne d'un plan

Soient a, b, c et d quatre réels, l'un au moins des réels a, b et c étant non nul.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan admettant le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ comme vecteur normal.

Réciproquement, tout plan de l'espace admet un équation du type $ax+by+cz+d=0$.

Exemple

Donner une équation du plan P passant par $A(-2, 1, 3)$ et orthogonal à la droite (BC) passant par $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}(3,3,-3)$ est un vecteur normal de P, donc comme P passe par A, P est l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, ce qui donne $3(x+2)+3(y-1)-3(z-3)=0$, ou après simplification $x+y-z+4=0$. $x+y-z+4=0$ est donc une équation de P.

3- Distance d'un point à un plan

Soit P le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point A.

Pour tout point M de l'espace, on appelle distance du point M au plan P la longueur du segment $[MH]$ où H est la projection orthogonale de M sur P.

On a de plus $MH=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Démonstration

Comme $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HM}=k\vec{n}$.

D'autre part, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\vec{n}=\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=k\vec{n}^2=k\|\vec{n}\|^2$ et $k=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$. Comme $\overrightarrow{HM}=k\vec{n}$, on en déduit que $\overrightarrow{HM}=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$

et donc que $MH = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Application

Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

La distance du point M_0 à P est égale à $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

(on utilise le résultat précédent en prenant le vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$)

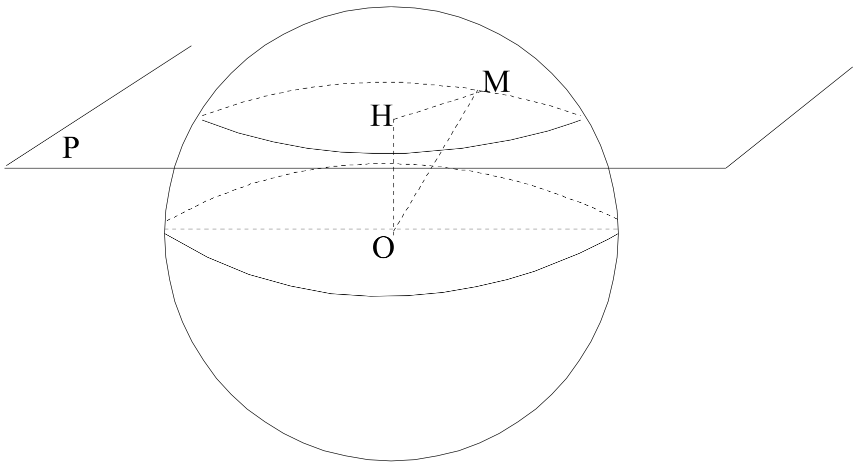
4- Sphères

> La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace vérifiant l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

en effet M est sur la sphère si et seulement si $\Omega M = R$, soit $\Omega M^2 = R^2$.

Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit S la sphère de centre Ω et de rayon R et soit P un plan.
On appelle H la projection orthogonale de Ω sur P et d la distance de Ω à P, soit $d = \Omega H$.
Si $d > R$, alors S et P n'ont aucun point commun.
Si $d = R$, alors S et P n'ont qu'un seul point commun H; le plan est tangent à la sphère.
Si $d < R$, alors S et P se coupent suivant un cercle de centre H.



Si M est un point de l'intersection de S et P, le triangle OHM est rectangle en H car (OH) est perpendiculaire à P. On a donc $HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2$.
L'intersection de S et P est donc le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.