Rappels sur les probabilités

A. Modélisation d'une expérience aléatoire

1- Univers

Lorsqu'une expérience aléatoire comporte un nombre fini d'issues, on appelle univers l'ensemble Ω des issues.

Exemples :

- on lance un dé : l'ensemble des issues est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- on lance deux fois une pièce de monnaie : l'ensemble des issues est $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$

2- Loi de probabilité

On définit sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, ...,x_n\}$ une loi de probabilité P en se donnant une suite de nombres $p_1, p_2, ..., p_n$ vérifiant :

- pour tout i pris entre 1 et n, $p_i > 0$.
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, soit $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Remarque

Comme tous les p_i sont positifs et que leur somme est 1, pour tout i pris entre 1 et n, $p_i < 1$.

Exemple

Une urne contient 1 boule jaune, 2 boules rouges et 3 boules bleues. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur. L'univers est $\Omega = \{J, R, B\}$. On obtient une bonne loi de probabilité lorsque les fréquences d'apparition des différentes issues se rapprochent des p_i. Cela nous amène à la loi suivante :

issue	***J***	***R***	***B***
probabilité p_i	1/6	2/6	3/6

3- Loi équirépartie

On dit qu'une loi de probabilité est équirépartie lorsque tous les p_i sont égaux. Dans ce cas, si l'univers contient n éléments, on a pour tout i entre 1 et n, $p_i = \frac{1}{n}$.

B. Probabilité et événements

1- Evénements

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, ...,x_n\}$ l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On appelle événement toute partie A de Ω.

Un événement $\{x_i\}$réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.

Ω est l'événement certain. $\emptyset$ est l'événement impossible.

Pour tout événement A, on définit l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, qui contient les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Deux évènements A et B étant donnés, on définit :

- $A \cup B$, réunion de A et B: issues qui sont dans A **ou** dans B
- $A \cap B$, intersection de A et B: issues qui sont dans A **et** dans B

2- Probabilité d'un événement

Lorsque l'univers est muni d'une loi de probabilité P, la probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues contenues dans A.
Dans le cas de l'équiprobabilité, $P(A)$ est le quotient du nombre d'issues contenues dans A (cas favorables) par le nombre total d'issues de l'univers (cas possibles). Le calcul de $P(A)$ se ramène à un problème de dénombrement.

$$P(A)=\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

3- Propriétés des probabilités

On considère un univers Ω muni d'une loi de probabilité P.

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset)=0$.
- pour tout événement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont incompatibles et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout événement A, $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- Quels que soient les évènements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

C. Variables aléatoires

1- Définition

Une variable aléatoire X est une fonction à valeurs réelles définie sur un univers muni d'une loi de probabilité P.
Si X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$, on note $p_i = P(X = x_i)$.
On définit ainsi la loi de probabilité de X.

Exemple

On lance un dé. On perd 2 euros si on tire 1 ou 2, on gagne 0,5 euros si on tire 3 et enfin on gagne 1euro si on tire 4, 5 ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage. Ainsi :
$X(1)= X(2) = -2$; $X(3) = 0,5$; $X(4) = X(5) = X(6) = 1$.
On a $(X=-2) = \{1,2\}$, $(X=0,5) = \{3\}$ et $(X=1) = \{4,5,6\}$, d'où
$P(X=-2) = 2/6 = 1/3$, $P(X=0,5) = 1/6$ et $P(X=1) = 3/6 = 1/2$.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
$P(X=x_i)$	1/3	1/6	1/2

2- Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$. On appelle espérance mathématique de X, le réel

$$\overline{X}=E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

On appelle variance de X, le réel $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \overline{X})^2$.

On appelle écart type de X le réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple

Reprenons le jeu décrit au 1) et la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
$P(X=x_i)$	1/3	1/6	1/2

On a alors $E(X)=-2\times\frac{1}{3}+0,5\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{-4}{6}+\frac{0,5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0,5}{6}=\frac{-1}{12}$.

Comme l'espérance mathématique est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.