Conditionnement et indépendance

A. Probabilités conditionnelles

1- Définition

> Soit A un événement de l'univers Ω muni de la loi P tel que $P(A) \neq 0$.
> On définit sur Ω une nouvelle loi de probabilité notée P_A en posant pour tout événement B
> $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
> P_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. On note encore $P_A(B)=P(B/A)$, probabilité de B sachant A.

Remarque
Comme $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, on a aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
La réalisation de $A \cap B$ s'obtient en réalisant A, puis B sachant que A est réalisé.

Exemple
Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
Considérons les évènements A : « la première boule est rouge » et B: « la deuxième boule est rouge ».
Tirer deux boules rouges correspond à l'évènement $A \cap B$.
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Or $P(A)=\dfrac{5}{8}$ (5 boules rouges parmi 8) et $P_A(B)=\dfrac{4}{7}$ (après le tirage de la première boule rouge il reste 4 boules rouges parmi 7).
Ainsi $P(A\cap B)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$.

2- Formule des probabilités totales

> On considère des évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ formant une partition de l'univers Ω (leur réunion donne Ω et ils sont deux à deux disjoints).
> Alors pour tout événement B,
> $$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i\cap B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B),$$
> avec pour tout i pris entre 1 et n, $P(A_i\cap B)=P(A_i)\times P_{A_i}(B)$.

Exemple
Une urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne U_2 contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.
On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
Appelons U_1, U_2 et U_3 les évènements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition

de l'univers et on a $P(U_1)=P(U_2)=P(U_3)=\frac{1}{3}$.

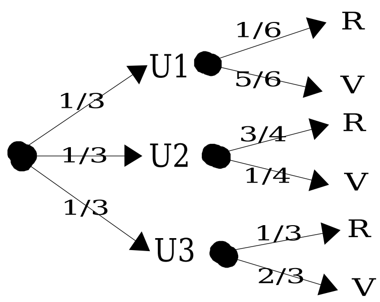
Soit B l'évènement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne $P(B)=P(U_1\cap B)+P(U_2\cap B)+P(U_3\cap B)$,

donc $P(B)=P(U_1)\times P_{U_1}(B)+P(U_2)\times P_{U_2}(B)+P(U_3)\times P_{U_3}(B)$.

Or $P_{U_1}(B)=\frac{1}{6}$, $P_{U_2}(B)=\frac{3}{4}$ et $P_{U_3}(B)=\frac{1}{3}$.

On a donc $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

On peut retrouver ce résultat en utilisant un arbre de probabilité.



On applique les règles suivantes :

- On a une probabilité sur la première branche, puis des probabilités conditionnelles sur les branches suivantes.
- Tous les chemins partant d'un événement forment une partition de cette événement.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Ainsi une simple lecture de l'arbre nous donne le résultat $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

B. Indépendance

1- Evènements indépendants

> On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
> Cela revient à dire que si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = P(B)$.
> (il est naturel de dire que A et B sont indépendants si la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A)

Exemple

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Soient A l'évènement « le premier moteur tombe en panne » et B l'évènement « le second moteur tombe en panne ». Alors $A \cap B$ est l'évènement « les deux moteurs tombent en panne ».

On a $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=10^{-8}$. L'évènement contraire, $\overline{A\cap B}$, signifie qu'au moins l'un des moteurs n'est pas tombé en panne, donc que l'avion arrive à bon port. On a $P(\overline{A\cap B})=1-10^{-8}$.

2- Propriété

> Si deux évènements A et B sont indépendants, alors les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants aussi, de même que $\overline{A}$ et B, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Démonstration

Comme B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer la formule des probabilités totales et on obtient :
$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$, d'où $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$.
Mais comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc
$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A)\times P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)\times P(\overline{B})$ ce qui montre que les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

3- Répétition d'expériences indépendantes

On considère une expérience aléatoire qui donne lieu à un événement A avec la probabilité p. La répétion de cette expérience n fois dans des conditions similaires produit des évènements indépendants; la probabilité que l'évènement A se produise exactement n fois est donc égale à p^n.

Exemple

On lance un dé non pipé 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ?
L'évènement A « obtenir au moins une fois un 6 » est le contraire de l'évènement B « n'obtenir aucun 6 » qui consiste à obtenir un résultat différent de 6 quatre fois de suite. Comme la probabilité d'obtenir un résultat différent de 6 lors d'un lancer est 5/6, on a :
$P(B)=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}$ et donc $P(A)=1-P(B)=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\approx 0,52$.