Droites et plans de l'espace

A. Barycentre

1- Droite et barycentre de deux points

Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés, c'est à dire deux points affectés des coefficients α et β. Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre de (A,α) et (B,β).

Propriétés

Soient A et B deux points distincts.

- Le point G, barycentre de (A,α) et (B,β), se trouve sur la droite (AB); si α et β sont de même signe, le point G se trouve sur le segment $[AB]$.
- Pour tout point M de la droite (AB), il existe deux réels α et β tels que M soit le barycentre de (A,α) et (B,β); la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.
- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B à coefficients positifs.

2- Plan et barycentre de trois points

Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés.

Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

Propriétés

Soient A, B et C trois points non alignés.

- Le point G, barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), se trouve dans le plan (ABC); si α, β et γ sont de même signe, le point G se trouve à l'intérieur du triangle ABC.
- Pour tout point M du plan (ABC), il existe trois réels α, β et γ tels que M soit le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ); le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de A, B et C.
- L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C à coefficients positifs.

3- Barycentre de n points

Soient $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ n points pondérés tels que $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\neq 0$.

On appelle barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ l'unique point G tel que $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

a) Homogénéité

Pour tout réel k non nul, si G le barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$, alors G est aussi le barycentre de $(A_1, k\alpha_1), (A_2, k\alpha_2), \dots, (A_n, k\alpha_n)$.

b) Propriété de réduction des sommes

Soit G le barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

Alors pour tout point M, $\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$.

c) Associativité

> Si G est le barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots , (A_n, \alpha_n)$
> et si I est le barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots , (A_{n-1}, \alpha_{n-1})$,
> alors G est le barycentre de $(I, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}), (A_n, \alpha_n)$.

d) Isobarycentre

On appelle isobarycentre de $A_1, A_2, \dots , A_n$, le barycentre de $(A_1,1), (A_2,1), \dots ,(A_n,1)$.
L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$.
L'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité (point d'intersection des médianes) du triangle ABC.

B. Droites de l'espace

1- Représentation paramétrique d'une droite

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul. La droite D passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est formée par l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
Dire que M appartient à D est donc équivalent à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Cela se traduit par le système de relations : $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ qui est appelé représentation paramétrique de D.
A chaque valeur du réel t correspond un point de D et réciproquement, à chaque point de D correspond un réel t.

Exemple
Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(-1,2,-3)$ et $B(1,-1,1)$.
La droite (AB) passe par A et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}(2,-3,4)$ come vecteur directeur. Nous obtenons la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\text{t} \\ y = 2 - 3\text{t} \\ z = -3 + 4\text{t} \end{cases}$$

Nous aurions pu choisir le point B comme point de D. Cela donnerait la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\text{s} \\ y = -1 - 3\text{s} \\ z = 1 + 4\text{s} \end{cases}$$

La représentation paramétrique d'une droite n'est donc pas unique. Dans l'exemple proposé, on passe de l'une à l'autre en effectuant le changement de paramètre $s = t-1$.

2- Droite intersection de deux plans

Soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Si leurs vecteurs normaux $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D.

Le système $\begin{cases} a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1=0 \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2=0 \end{cases}$ donne une réprésentation de la droite D comme intersection de deux plans.

Exemple
Donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le système
$\begin{cases} 2x+y-z-2=0 \\ x+3y+7z-11=0 \end{cases}$.
Nous pouvons utiliser l'une des coordonnées comme paramètre. Posons $z = t$.
En multipliant la seconde équation par 2 et en calaculant la différence entre les deux équations nous obtenons $-5y-15z+20=0$, soit $y=-3z+4$.
En reportant dans la première équation, nous obtenons $2x+(-3z+4)-z-2=0$, soit $x = 2z - 1$.
Finalement, en tenant compte de z=t, nous obtenons la représentation paramétrique suivante :
$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+4 \\ z=t \end{cases}$.
La droite D passe par le point de coordonnées (-1,4,0) et admet comme vecteur directeur le vecteur de coordonnées (2,-3,1).

C. Problèmes d'intersections

1- Intersection de deux plans

Soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, de vecteurs normaux $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$.

- Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D.
- Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont soit confondus (leurs équations sont équivalentes), soit strictement parallèles (leurs équations sont incompatibles).
-

2- Intersection d'une droite et d'un plan

Soient P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\gamma t \end{cases}$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, le plan P et la droite D sont sécants en un point dont le paramètre t vérifie l'équation $a(x_0+\alpha t)+b(y_0+\beta t)+c(z_0+\gamma t)+d=0$.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, alors soit la droite est incluse dans le plan, soit la droite est strictement parallèle au plan P. L'équation $a(x_0+\alpha t)+b(y_0+\beta t)+c(z_0+\gamma t)+d=0$ est alors équivalente soit à $0t = 0$, soit à $0t = k$ avec k non nul.

3- Intersection de trois plans

Soient P_1, P_2 et P_3 trois plans d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ et $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.
L'intersection de ces trois plans est formée par l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient le

système : $\begin{cases} a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1=0 \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2=0 \\ a_3 x+b_3 y+c_3 z+d_3=0 \end{cases}$.

Cette intersection est :

- soit vide (les 3 plans sont strictement parallèles ou se coupent suivant des droites strictement parallèles)
- soit réduite à un point unique
- soit une droite (les 3 plans se coupent suivant une seule droite)
- soit un plan (les 3 plans sont confondus)

Exemples

Résolution de systèmes par la méthode de Gauss.

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-2y-z=11\,(L_1) \\ 2x-5y-2z=3\,(L_2) \\ -5x-y+2z=-33\,(L_3) \end{cases}$.

On effectue des combinaisons linéaires de L_1 et L_2, puis de L_1 et L_3 pour annuler les termes en *x* de L_2 et L_3. Ainsi on remplace L_2 par $2L_1-3L_2$, et L_3 par $5L_1+3L_3$. On obtient ainsi le nouveau système équivalent au premier : $\begin{cases} 3x-2y-z=11\,(L_1) \\ 11y+4z=13\,(L_2) \\ -13y+z=-44\,(L_3) \end{cases}$.

On effectue une combinaison linéaire de L_2 et L_3 pour annuler le terme en *y* de L_3. Ainsi on remplace L_3 par $13L_2+11L_3$. On obtient ainsi le nouveau système équivalent au premier :

$$\begin{cases} 3x-2y-z=11\,(L_1) \\ 11y+4z=13\,(L_2) \\ 63z=-315\,(L_3) \end{cases}.$$

L_3 donne $z=\dfrac{-315}{63}=-5$. En remplaçant z par -5 dans L_2 on obtient $y=\dfrac{13-4\times5}{11}=3$. Enfin, en remplaçant z par -5 et y par 3 dans L_1 on obtient $x=\dfrac{11+2\times3-5}{3}=4$.

Le système a donc une solution unique : (4, 3, -5).