Lois de probabilités continues

Une variable aléatoire est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. On est amené à calculer la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur d'un intervalle donné plutôt qu'une valeur isolée.

A. Densité d'une loi de probabilité continue

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I=[a ; b] telle que $\int_a^b f(t)\,dt=1$.
>
> Une variable aléatoire X suit sur I la loi de probabilité P de densité f lorsque pour tout réel x de I on a $P(a\leqslant X\leqslant x)=\int_a^x f(t)\,dt$. On écrit aussi $P([a,x])=\int_a^x f(t)\,dt$.

$P([a, x])$ est donc l'aire du domaine associé à f entre a et x.

Soit F la fonction définie par $F(x)=P(a\leqslant X\leqslant x)=\int_a^x f(t)\,dt$. F est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Propriétés

> - F est dérivable, $F'=f$ et $F(b)=1$
> - Si c et d sont deux réels de I avec $c\leqslant d$, $P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d f(t)\,dt=F(d)-F(c)$.
>
>   On peut remarquer que $P(X=c)=P(c\leqslant X\leqslant c)=F(c)-F(c)=0$.
> - $P(x< X\leqslant b)=\int_x^b f(t)\,dt=F(b)-F(x)=1-F(x)$.

B. Loi uniforme

> On appelle loi uniforme sur I=[a ; b] la loi de probabilité P dont la densité est une fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.

Soit $f(t) = k$ la fonction constante densité de la loi uniforme sur I.

Comme $\int_a^b k\,dt=k(b-a)=1$, on a $k=\frac{1}{b-a}$.

Propriété

Si c et d sont deux réels de [a, b] avec $c \leqslant d$, alors $P([c,d])=\int_c^d \frac{1}{b-a}dt=\frac{d-c}{b-a}$.

Dans le cas de la loi uniforme sur [0;1], la probabilité d'un intervalle est sa longueur.

C. Loi exponentielle

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I = [a ; +∞[et $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Si $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$, on écrit $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt=1$ et on obtient une loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I.

> Soit λ un réel strictement positif.
> La fonction f définie sur [0 ; +∞[par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est la densité d'une loi de probabilité P, appelée loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration

f est continue et positive sur [0 ; +∞[. D'autre part, on a $F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt=1-e^{-\lambda x}$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$.

Durée de vie sans vieillissement
La durée de vie d'un individu est une variable aléatoire T à valeurs dans [0 ; +∞[.
T suit la loi de durée de vie sans vieillissement si la probabilité qu'un individu soit vivant à l'instant $t+h$ ($h>0$), sachant qu'il est vivant à l'instant t, ne dépend pas de t.
Autrement dit, $P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)$ ne dépend pas de t.
Comme cette probabilité ne dépend pas de t, elle a la valeur constante obtenue pour $t=0$.
D'où, $P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h)$.
En utilisant la définition des probabilités conditionnelles, on en déduit que :
$P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)=\frac{P((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t))}{P(T\geqslant t)}=\frac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)}$ et finalement $\frac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)}=P(T\geqslant h)$.
En posant $\varphi(t)=P(T\geqslant t)$ pour tout t réel positif ou nul, on a $\varphi(t+h)=\varphi(t)\times\varphi(h)$.
En supposant φ non nulle et dérivable, les fonctions vérifiant cette égalité sont de la forme $e^{\alpha t}$.
D'autre part, comme $\varphi(t)<1$, nous avons $\alpha<0$, il existe donc un réel $\lambda>0$ tel que $\varphi(t)=e^{-\lambda t}$.
Finalement, on a $P(T\geqslant t)=e^{-\lambda t}$, donc $P(T<t)=1-e^{-\lambda t}$. La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ.