Logarithmes

A. Logarithme népérien

1- Définition

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle varie de 0 à $+\infty$. Ainsi, pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel y tel que $e^y=x$, ce réel est appelé logarithme népérien de x.

> La fonction logarithme népérien est la fonction notée ln, qui à tout réel strictement positif x associe le réel $\ln(x)$ (ou $\ln x$) dont l'exponentielle est égale à x.

Conséquences immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$; seuls les nombres positifs ont un logarithme.
- Pour tout réel $x > 0$, $y=\ln(x)$ équivaut à $x=e^y$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)}=x$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x)=x$.
- $\ln(1) = 0$ car $e^0=1$ et $\ln(e) = 1$ car $e^1=e$.

2- Variations

> La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$.
On en déduit que $e^{\ln(a)}<e^{\ln(b)}$, donc que $\ln(a)<\ln(b)$ d'après les propriétés de la fonction exponentielle. La fonction logarithme népérien conserve l'ordre des nombres, elle est donc croissante.

Conséquences

Quels que soient les réels strictement positifs a et b :

- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

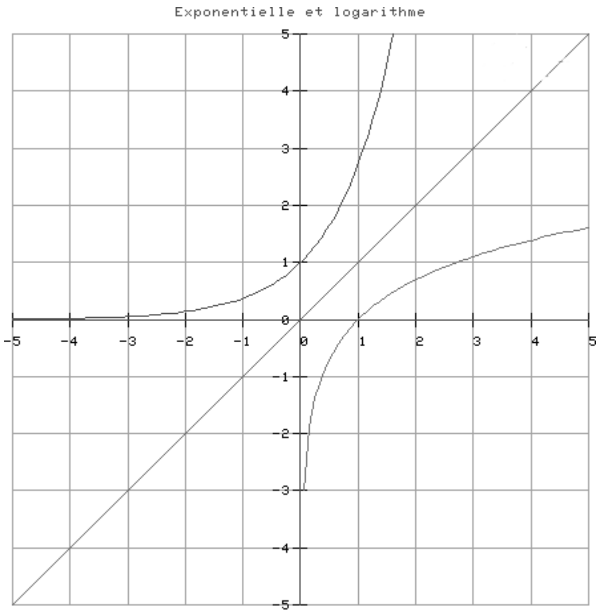
3- Courbe

> Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Les points $M(x,y)$ et $M'(y,x)$ sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y=x$, en effet :

- le milieu de $[MM']$ a ses coordonnées égales à $\frac{x+y}{2}$, il est donc sur la droite D.
- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(1\,;1)$, vecteur directeur de D car $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MM'}=0$.



Ainsi, dire que $M(x,y)$ est sur la courbe représentative de la fonction exponentielle équivaut à dire que son symétrique par rapport à D est $M'(y,x)$ avec $y=e^x$, soit $x=\ln(y)$, donc que M' est sur la courbe représentative de la fonction logarithme.

B. Relation fonctionnelle

> Quels que soient les réels strictement positifs a et b, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.

Démonstration
On note $A=\ln(ab)$ et $B=\ln(a)+\ln(b)$.
On a alors $e^A=ab$ et $e^B=e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}\cdot e^{\ln(b)}=ab$, d'où $A=B$.

Conséquences

> • Quel que soit le réel strictement positif b, $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$.
>
> • Quels que soient les réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.
>
> • Quels que soient le réel strictement positif a et l'entier naturel n, $\ln(a^n)=n\cdot\ln(a)$.
>
> • Quel que soit le réel strictement positif a, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$.

C. Limites et dérivées

1- Limites en 0 et en l'infini.

> On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.
>
> De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.

Démonstration
a) En l'infini
Soit A un nombre réel. Dès que $x>e^A$, on a $\ln(x)>A$. Ainsi tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient

toutes les valeurs de ln(x) pour x assez grand (ici $x > e^A$). Donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

b) En 0

Pour $x > 0$, posons $X = \frac{1}{x}$. On a d'une part $\lim_{x \to 0} \mathrm{X} = +\infty$ et d'autre part $\ln(x) = -\ln(X)$. D'où, $\lim_{x \to 0} \ln(x) = \lim_{\mathrm{X} \to +\infty} -\ln(\mathrm{X}) = -\infty$.

c) Pour $x > 0$, posons X = ln(x); on a alors $x = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ et $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{X}{e^X}$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{\mathrm{X} \to +\infty} \frac{\mathrm{X}}{e^{\mathrm{X}}} = 0$.

2- Continuité et dérivabilité

> La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Comme les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ et comme la fonction exponentielle est continue et dérivable, il en va de même pour la fonction logarithme népérien.

> La dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse. Sur $]0\,;+\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration

On a pour tout x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$. En dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient : $(\ln x)' e^{\ln x} = 1$, soit $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors ln u est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

3- Tableau de variations

Les résultats précédents nous permettent de construire le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
ln(x)			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

D. Logarithme décimal

> La fonction logarithme décimal est la fonction notée log et définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés

- Quels que soient les réels strictement positifs a et b, $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$.
- log(1) = 0 et log(10) = 1.
- Pour tout entier relatif n, $\log(10^n)=n$.
- Si x est un nombre positif écrit sous forme scientifique, c'est à dire $x=a\cdot 10^n$ avec $a\in[1\,;10[$, on a $\log(x)=n+\log(a)$ avec $\log(a)\in[0\,;1[$. La partie entière de log(x) donne l'exposant de la puissance de 10, donc l'ordre de grandeur de x.