Limites de fonctions

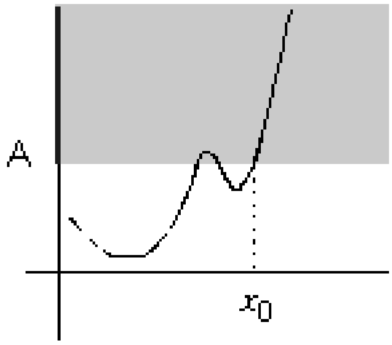
A. Limite infinie quand x tend vers l'infini

1- Définitions

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]A; +\infty[$ avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

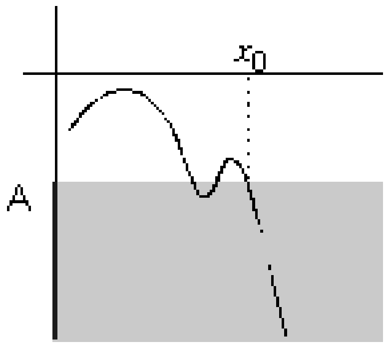
Sur la figure, on a $f(x) > A$ dès que $x > x_0$.



Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]-\infty; A[$ avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Sur la figure, on a $f(x) < A$ dès que $x > x_0$



Enfin, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(-x)=+\infty$,

et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(-x)=-\infty$.

2- Exemples à retenir

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Soit A un réel positif. Pour tout réel x assez grand, ici supérieur à A, tous les $f(x)$ se trouvent dans $]A; +\infty[$.

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

Soit A un réel positif. Pour que $x^2 > A$, il suffit que $x > \sqrt{A}$. Donc pour tout réel x assez grand, ici supérieur à $\sqrt{A}$, tous les $f(x)$ se trouvent dans $]A; +\infty[$.

> $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Soit A un réel positif. Pour que $\sqrt{x} > A$, il suffit que $x > A^2$. Donc pour tout réel x assez grand, ici supérieur à A^2, tous les $f(x)$ se trouvent dans $]A; +\infty[$.

> $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Soit A un réel positif. Nous avons montré que la fonction exponentielle est croissante et que pour tout réel x, $e^x > x$. Pour que $e^x > A$, il suffit que $x > A$, car, alors, $e^x > e^A > A$. Donc pour tout réel x assez grand, ici supérieur à A, tous les $f(x)$ se trouvent dans $]A; +\infty[$.

3- Théorèmes de comparaison à l'infini

> • Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et si pour x assez grand $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
> • Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et si pour x assez grand $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Démonstration

Soit A un réel. Pour x assez grand on a à la fois $g(x) \in]A; +\infty[$ et $f(x) \geqslant g(x)$, on en déduit que $f(x) \in]A; +\infty[$, donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4- Limite de x^n

> Soit n un entier naturel non nul :
>
> 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
> 2. Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, mais si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Démonstration

On sait que pour $n > 0$ et $x > 1$, $x^n \geqslant$ x. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

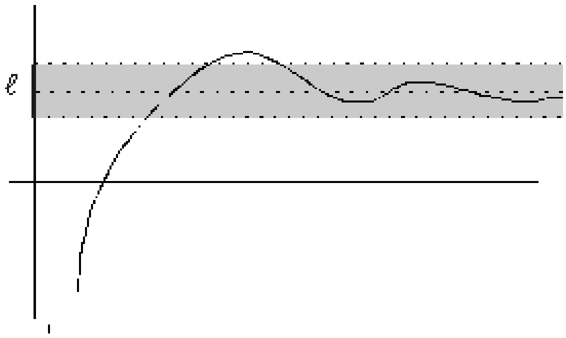
Si n est pair, $(-x)^n = x^n$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x)^n = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

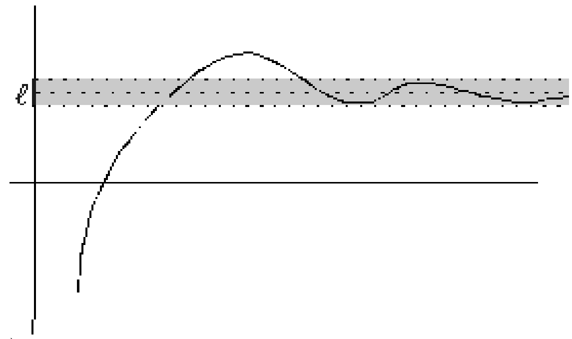
Si n est impair, $(-x)^n = -x^n$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x)^n = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^n = -\infty$

B. Limite finie quand x tend vers l'infini

1- Définition

> Soit l un réel. Dire qu'une fonction f a pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
>
> On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.





On dira que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=l$.

2- Unicité de la limite

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$, alors la limite l est unique.

Démonstration

En effet, supposons qu'il existe deux limites distinctes l_1 et l_2.
On peut alors définir un intervalle $]a_1, b_1[$ contenant l_1 et un intervalle $]a_2, b_2[$ contenant l_2 et tels que l'intersection de $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$ soit vide.
D'après la définition de la limite, pour x assez grand, toutes les valeurs de $f(x)$ devraient se trouver dans $]a_1, b_1[$ et dans $]a_2, b_2[$. C'est impossible puisque l'intersection de ces intervalles est vide. On en déduit qu'il ne peut pas exister deux limites distinctes l_1 et l_2 et que l est donc unique.

3- Exemples à retenir

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

Soit $]a\,;b[$ un intervalle ouvert contenant 0; on a donc $a < 0 < b$. Pour que *f(x)* soit dans l'intervalle $]a\,;b[$, il suffit que $a < \frac{1}{x} < b$.

Pour x positif, $\frac{1}{x} > 0$, donc $\frac{1}{x} > a$.

D'autre part, toujours avec x positif, on a $\frac{1}{x} < b$ est équivalent à $x > \frac{1}{b}$.

Pour x assez grand, ici $x > \frac{1}{b}$, on a donc $f(x)$ contenu dans l'intervalle]a ; b[.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}=0$.

Soit $]a\,;b[$ un intervalle ouvert contenant 0; on a donc $a < 0 < b$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, pour x assez grand, $f(x) > \frac{1}{b}$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{f(x)} < b$; d'autre part comme $f(x) > \frac{1}{b}$, on a $f(x) > 0$, donc $\frac{1}{f(x)} > 0 > a$. Ainsi, pour x assez grand, on a bien $a < \frac{1}{f(x)} < b$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

en effet $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}=0$

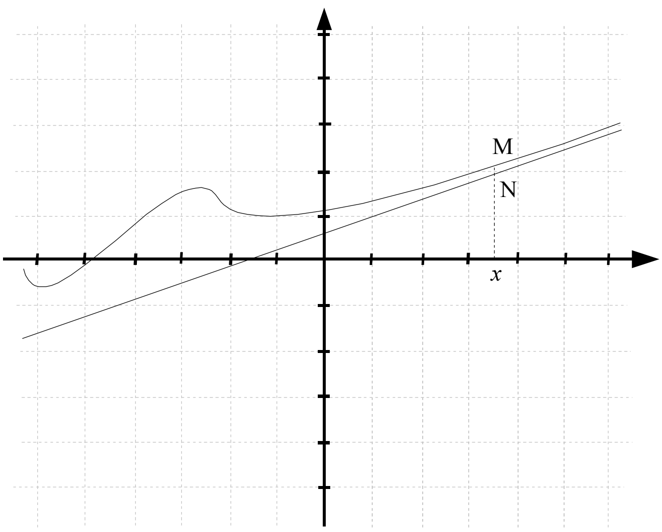
4- Théorème des gendarmes

> Soient *f*, *g*, *h* trois fonctions et *L* un réel.
> Si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$ et si pour *x* assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Démonstration
Soit I un intervalle contenant *L*. Pour *x* assez grand on a à la fois $g(x) \in I$, $h(x) \in I$ et $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. On en déduit que $f(x) \in I$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Exemple
Soit *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x^2}$. Déterminer sa limite en $+\infty$.
Comme $-1 \leqslant \sin(3x) \leqslant 1$, on a $\frac{-1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$; or $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5- Asymptotes horizontales ou obliques



Dans le plan muni d'un repère, on appelle C_f la courbe représentative d'une fonction *f* et Δ la droite d'équation $y = ax + b$.
Soient M et N les points d'abscisse *x* qui se trouvent respectivement sur C_f et sur Δ.
On dit que la droite Δ est une asymptote de la courbe C_f en $+\infty$ si la distance MN tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
On définit de la même façon les asymptotes en $-\infty$.

a) Asymptotes horizontales

> Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la coube représentative de *f*.

b) Asymptotes obliques

> S'il existe deux réels *a* et *b* tels que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de *f*.

En particulier, si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de *f*.

C. Limites quand x tend vers un réel a

1- Cas où f est définie en a

> Si f est une fonction dérivable en un réel a, alors $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Par exemple, si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $\lim_{x\to 4} f(x) = 4^2 - 8 = 8$.

2- Limite finie quand x tend vers une valeur interdite

Si $f(x)$ devient aussi proche d'un réel l qu'on le souhaite lorsque x est suffisamment proche de la valeur interdite a, on dit que la fonction f a pour limite l lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

Résultats à connaître

> $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

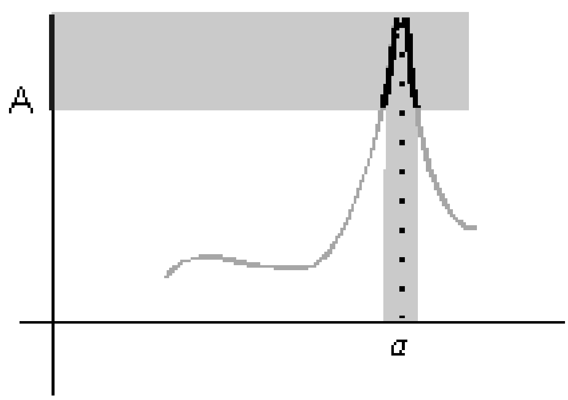
Démonstrations :

- $\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ est le nombre dérivé de la fonction sin(x) en 0.
  On en déduit que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\cos(0)=1$.
- $\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-e^0}{x-0}$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ est le nombre dérivé de la fonction e^x en 0. On en déduit que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e^0=1$.

3- Limite infinie quand x tend vers une valeur interdite

Si $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite lorsque x est suffisamment proche de la valeur interdite a, on dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Sur la figure, on a $f(x) > A$ dès que x est assez proche de a.



Il est parfois nécessaire de distinguer les cas où x tend vers a par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. On note alors $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$, on distingue une limite à droite et une limite à gauche.

Asymptotes verticales

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la la courbe représentative de f.

Résultats à connaître

- $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$

D. Limites et opérations

1- Sommes

limite de f	L_1	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de g	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de f+g	L_1+L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

2- Produits

limite de f	L_1	$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de g	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
limite de fg	L_1L_2	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle de signes)	**???**

3- Quotients

limite de f	L_1	L	$\pm\infty$	$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de g	$L_2\neq 0$	$\pm\infty$	L	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$	0
limite de f/g	L_1 / L_2	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	**???**	**???**

Remarque

On a 4 formes indéterminées qui sont de la forme $\infty - \infty$, $0\times\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$.

4- Polynômes et fractions rationnelles

En l'infini, la limite d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré et la limite d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Démonstration pour un polynôme de degré 3

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec $a\neq 0$. Alors $P(x)=ax^3\left(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{c}{ax^2}+\dfrac{d}{ax^3}\right)$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}+\frac{d}{ax^3}=1$, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty} ax^3$.

Exemples

- $\lim_{x\to-\infty} 5x^3-2x^2+3=\lim_{x\to-\infty} 5x^3=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{5-x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{-x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x}=0$

5- Composée de deux fonctions

> a, b et c désignent des réels ou +∞ ou -∞. f et g sont des fonctions.
> Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim_{X\to b} g(X)=c$, alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x)=c$.

Cette propriété est admise. Elle consiste à faire un changement de variable $X=f(x)$.

Exemple

Soit f définie sur]0; +∞[par $f(x)=\sqrt{4+\frac{1}{x}}$.

On pose $X=4+\frac{1}{x}$ et on a $\lim_{x\to+\infty} 4+\frac{1}{x}=4$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}}=\lim_{X\to4} \sqrt{X}=2$.