Limites de suites

A. Suites convergentes

> Soit (u_n) une suite et L un nombre réel.
> On dit que (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite (u_n) est convergente et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ ou simplement $\lim u_n = L$.
Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Propriétés

- Si une suite est convergente, sa limite est unique.
- Les suites $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ..., $\frac{1}{n^k}$ avec $k > 0$ convergent vers 0.
- La suite q^n avec $-1 < q < 1$ converge vers 0.
- Si *f* est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors la suite $u_n = f(n)$ converge vers *L*. (attention la réciproque est fausse)
- Si la suite u_n converge vers *L* et si *f* est une fonction continue en *L*, alors la suite $f(u_n)$ converge vers *f*(*L*).

B. Suites à limite infinie

> On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $[A ; +\infty[$ (respectivement $]-\infty ; A]$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

Propriétés

- Les suites $\sqrt{n}$, n , n^2 , ... , n^k avec $k > 0$ admettent pour limite $+\infty$.
- Soit *f* une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors la suite $u_n = f(n)$ admettent pour limite $+\infty$. (même chose en $-\infty$)

Remarque

Si une suite a une limite infinie, alors elle est divergente. Mais il exite des suites divergentes qui n'ont pas de limite (finie ou infinie) comme la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

C. Opérations sur les limites

On retrouve les mêmes règles que pour les limites de fonctions.

1- Sommes

limite de u_n	L_1	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de v_n	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de u_n+v_n	L_1+L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

2- Produits

limite de u_n	L_1	$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de v_n	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
limite de $u_n v_n$	L_1L_2	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle de signes)	**???**

3- Quotients

limite de u_n	L_1	L	$\pm\infty$	$L\neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de v_n	$L_2\neq 0$	$\pm\infty$	L	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$	0
limite de $\frac{u_n}{v_n}$	L_1 / L_2	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	**???**	**???**

4- Théorèmes de comparaison

Soient u_n, v_n et x_n trois suites.

- Si $u_n \leq x_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim x_n = +\infty$.
- Si $x_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim x_n = -\infty$.
- Si $u_n \leq x_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim u_n = \lim v_n = L$, alors $\lim x_n = L$.
  (théorème des gendarmes pour les suites)
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, si $\lim u_n = L$ et si $\lim v_n = L'$, alors $L \leq L'$.

D. Théorèmes de convergence

1- Théorèmes de la convergence monotone.

- Si une suite est croissante et majorée par un réel M, alors elle est convergente et sa limite est inférieure ou égale à M.
- Si une suite est décroissante et minorée par un réel m, alors elle est convergente et sa limite est supérieure ou égale à m.

Note : ces théorèmes sont admis; ils permettent de savoir qu'une suite converge, mais ne donnent pas sa limite.
Idée de la démonstration : pour une suite croissante majorée, la limite est la borne inférieure des majorants.

Cas des suites récurrentes
Soit *f* une fonction continue, et u_n la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0.

Si la suite u_n est convergente vers une limite L, alors $L = f(L)$.
Attention : la réciproque est fausse, l'équation $f(x) = x$ peut avoir des solutions sans que la suite u_n soit convergente.

2- Suites adjacentes

> On dit que deux suites u_n et v_n sont adjacentes lorsque :
> - u_n est croissante
> - v_n est décroissante
> - $lim\ (v_n - u_n) = 0$.

Exemple : approximations décimales d'un réel
Considérons le nombre π .
Nous pouvons définir deux suites d_n et e_n donnant les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-n} près. On a ainsi $d_0 = 3$ et $e_0 = 4$, $d_1 = 3{,}1$ et $e_1 = 3{,}2$, $d_2 = 3{,}14$ et $e_2 = 3{,}15$, etc...
La suite d_n est croissante, la suite e_n est décroissante. De plus $e_n - d_n = 10^{-n}$, donc $lim\ (e_n - d_n) = 0$. Les suites d_n et e_n sont donc des suites adjacentes. On peut remarquer que π appartient à chacun des intervalles emboités $[d_n , e_n]$.

3- Théorèmes des suites adjacentes

> Si deux suites u_n et v_n sont adjacentes, alors :
> - pour tout entier *n*, $u_n \leq v_n$
> - u_n et v_n convergent vers une même limite L
> - pour tout entier *n*, $u_n \leq L \leq v_n$.

Démonstration
S'il existait un entier p tel que $u_p > v_p$, on aurait pour $n \geq p$, $u_n - v_n \geq u_p - v_p$ ce qui n'est pas possible car $lim\ (u_n - v_n) = 0$. Ainsi, pour tout entier n, $u_n \leq v_n$.
Pour tout entier naturel n on a donc $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ car u_n est croissante, v_n est décroissante et $u_n \leq v_n$. La suite u_n est croissante et majorée par v_0 , elle converge donc vers une limite L_1 . La suite v_n est décroissante et minorée par u_0 , elle converge donc vers une limite L_2 . Comme $lim\ (v_n - u_n) = 0$, on a $L_2 - L_1 = 0$, donc $L_1 = L_2$. Les deux suites ont même limite L.
Enfin, comme u_n est croissante, pour tout entier n on a $u_n \leq L$. En effet, s'il existait un entier p tel que $u_p > L$, on aurait pour $n \geq p$, $u_n - L \geq u_p - L$ ce qui n'est pas possible car $lim\ u_n = L$.
De même, comme v_n est décroissante, pour tout entier n on a $v_n \geq L$. Finalement, pour tout entier *n*, $u_n \leq L \leq v_n$.