Fonction Exponentielle

A. Définition et propriétés algébriques

On considère l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0)=1$ et on admet qu'elle a au moins une solution f, c'est à dire qu'il existe au moins une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Propriétés préliminaires

a) Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ ne s'annule pas.

Démonstration

Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x).f(-x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1)$;

comme $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$, on trouve $h'(x) = 0$. La fonction h est donc constante, et pour tout réel x, $h(x) = h(0) = f(0) \times f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x).f(-x) = 1$, ce qui montre que $f(x)$ ne peut pas être égal à 0.

b) Il n'existe qu'une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Supposons que f_1 et f_2 soient deux fonctions vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$; cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ car, d'après la propriété précédente, $f_2(x)$ ne peut pas s'annuler.

La fonction h est dérivable et $h'(x)=\dfrac{f_1'(x).f_2(x)-f_2'(x).f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$. Mais comme $f_1'(x)=f_1(x)$ et $f_2'(x)=f_2(x)$, on a $h'(x)=0$ et la fonction h est constante.

Pour tout réel x, $h(x) = h(0) = \dfrac{f_1(0)}{f_2(0)}=\dfrac{1}{1} = 1$. Ainsi $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, et $f_1(x) = f_2(x)$, ce qui montre qu'il n'existe qu'une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

2. Définition

> L'unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée la **fonction exponentielle**; elle est notée **exp**, l'image d'un réel x sera notée $\exp(x)$ ou $\exp x$.

Conséquences immédiates

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(x) = \exp(x)$
3. Pour toute fonction dérivable u, $\exp(u)$ est dérivable et $[\exp(u)]' = \exp(u) \times u'$.
4. Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

3. Propriété caractéristique et conséquences

> Pour tous réels a et b, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
> La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration

Soit $g(x)=\frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$. On a $g'(x)=\frac{\exp(a+x)\times\exp(x)-\exp(a+x)\times\exp(x)}{\exp(x)^2}=0$.

La fonction g est donc constante et pour tout x, $g(x) = g(0) = \exp(a)$.

D'où, $\frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}=\exp(a)$, soit $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

En prenant $x=b$, on retrouve la formule à démontrer.

Conséquences

> Pour tout réel b, $\exp(-b)=\frac{1}{\exp(b)}$.

On remplace a par $-b$ dans la formule caractéristique.

> Quels que soient les réels a et b, $\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

On remplace b par $-b$ dans la formule caractéristique.

> Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\exp(na)=(\exp(a))^n$.

Pour $n > 0$, on remplace na par $a + a + a + ... + a$ et on applique la formule caractéristique.
Pour $n < 0$, on pose $p=-n$ et on revient dans le cas précédent.

> Pour tout réel a, $\exp(a) > 0$.

Il suffit de remarquer que $\exp(a)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$ et qu'un carré est toujours positif ou nul. Comme $\exp(a) \neq 0$, on trouve bien $\exp(a) > 0$

B. Utilisation du nombre e

> Par définition, on appelle e le nombre égal à exp(1).

1. Approximation de *e* par la méthode d'Euler

On va construire une suite de points $M_n(x_n, y_n)$ tels que les y_n soient des approximations de $\exp(x_n)$.
Pour choisir les valeurs de x_n on utilise un pas h et on part de 0. La suite x_n sera donc une suite arithmétique de raison h et de premier terme $x_0 = 0$, et on aura $x_n = nh$.
Pour définir la suite y_n on utilise une approximation affine :
$\exp(x_{n+1}) = \exp(x_n + h) \approx \exp(x_n) + h.\exp(x_n) = \exp(x_n)(1 + h)$.
La méthode d'Euler consiste à confondre y_n et les approximations de $\exp(x_n)$. On obtient ainsi la suite y_n définie par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = (1 + h)y_n$.
La suite y_n est donc une suite géométrique de raison $1+h$ et de premier terme $y_0 = 1$. On en déduit que $y_n = (1 + h)^n$.
En se souvenant que y_n est une approximation de $\exp(x_n)$ et que $x_n = nh$, on obtient $\exp(nh) \approx (1 + h)^n$, formule qui donne des approximations d'autant plus précises que h est petit.
Par exemple :

- en choisissant $h = 0,1$ et $n=10$, on obtient $e = \exp(1) \approx 2,594$
- en choisissant $h = 0,01$ et $n=100$, on obtient $e = \exp(1) \approx 2,705$
- en choisissant $h = 0,001$ et $n=1000$, on obtient $e = \exp(1) \approx 2,717$
- en choisissant $h = 0,000\,001$ et $n=1\,000\,000$, on obtient $e = \exp(1) \approx 2,71828047$

On peut comparer ces résultats à la valeur donnée par une calculatrice : e $\approx$ 2,718281828.

2. La notation e^x

Commençons par faire deux remarques :

– Pour tout entier natuel n, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$. De plus, $\exp(-n) = \dfrac{1}{\exp(n)} = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$
– Les propriétés de la fonction exponentielle sont semblables à celles des puissances.

Ceci a amené les mathématiciens à adopter la notation

> $\exp(x) = e^x$.

Les propriétés de la fonction exponentielle s'écrivent alors :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$

C. Etude de la fonction exponentielle

1. Variations

> La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La dérivée est e^x, elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

> Quels que soient les réels a et b : $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

C'est une conséquence de la croissance stricte.

> Quels que soient les réels a et b : $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$

Si $a < b$, $e^a < e^b$, si $a > b$, $e^a > e^b$, on a donc forcément $a = b$.

2. Limites

a) Limite en +∞

> On a le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Démonstration

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x$. Nous allons montrer que pour tout x, $f(x) > 0$.
La dériviée est $f'(x) = e^x - 1$; elle s'annule pour $x = 0$, est négative pour $x<0$ et positive pour $x>0$.
On a donc pour f le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

Ceci nous montre que pour tout x, $f(x) \geqslant 1$ et donc que pour tout x, $f(x) > 0$.
Comme $f(x) = e^x - x$, on en déduit que pour tout x, $e^x > x$.
Enfin, comme $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, on a bien $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

b) Limite en -∞

> On a le résultat suivant : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

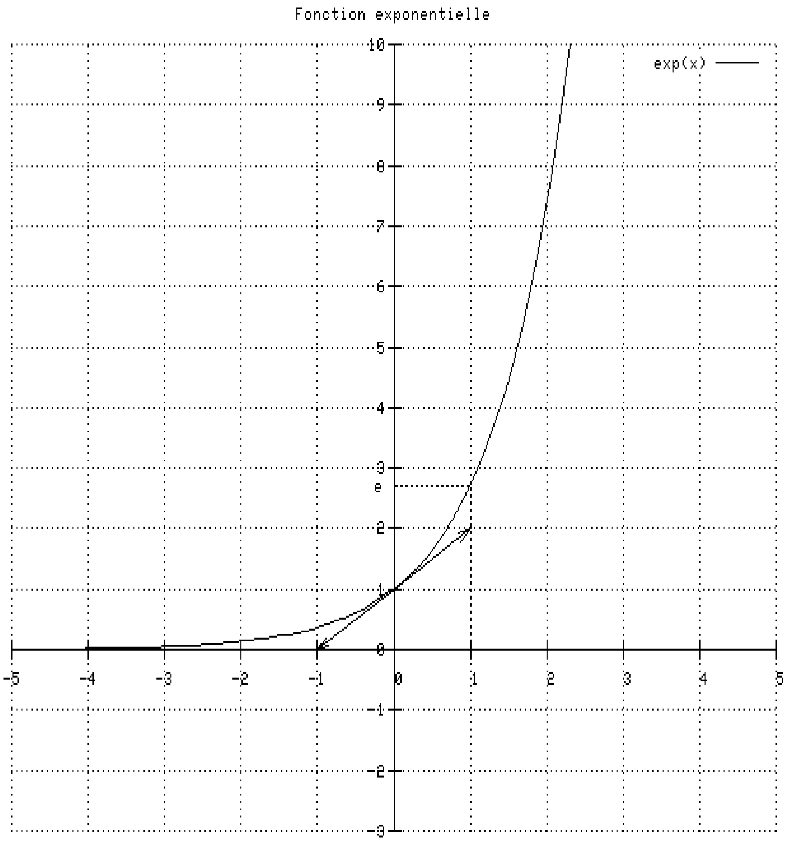
Démonstration
On utilise un changement de variables.
Posons $X=-x$. Lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$ et $e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}$.
Ainsi, $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$. Comme e^X tend vers $+\infty$, $\frac{1}{e^X}$ tend vers 0.

3. Tableau de variations et courbe

Les résultats précédents permettent de construire le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x)$	0	↗	$+\infty$

Pour construire la courbe représentative de la fonction exponentielle on notera qu'elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et que la tangente en ce point admet $y = x+1$ comme équation.
En effet : $e^0 = 1$ et le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est aussi $e^0 = 1$.



4. Limites remarquables

a) Comparaison de e^x et x

> On a les deux résultats suivants : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0$

(à l'infini la fonction exponentielle l'emporte sur x)

Démonstrations

Soit $g(x) = e^x - x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = e^x - 1$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$, elle a donc un minimum qui est $g(0) = 1$, on a donc $g(x) > 0$ pour tout réel *x*. Ceci se traduit par $e^x > x$ pour tout réel *x*.

Appliquons cette propriété au réel $\dfrac{x}{2}$ avec *x* strictement positif. On obtient $e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2}$. Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, on peut les élever au carré en conservant l'ordre. Ceci nous donne $e^x > \dfrac{x^2}{4}$, soit $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{4}$ pour *x* > 0. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Pour la limite de $x \cdot e^x$, effectuons le changement de variable $X = -x$. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $x \cdot e^x = -X \cdot e^{-X} = \dfrac{-X}{e^X} = \dfrac{-1}{\dfrac{e^X}{X}}$. Ceci donne $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{-1}{\dfrac{e^X}{X}} = 0$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

b) Généralisation à e^x et x^n

Pour tout entier naturel n, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n \cdot e^x=0$.

(à l'infini l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x)

Démonstration

On a vu que pour tout réel x, $e^x>x$. Appliquons ce résultat à $\frac{x}{n+1}$ avec x strictement positif.

On obtient $e^{\frac{x}{n+1}}>\frac{x}{n+1}$. En élevant à la puissance n+1, ceci nous donne $e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$, soit $\frac{e^x}{x^n}>\frac{x}{(n+1)^{n+1}}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}}=+\infty$, on en déduit $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty$. En effectuant le changement de variable $X=-x$, on démontre comme précédemment que $\lim_{x\to-\infty} x^n \cdot e^x=0$.

Exemples d'application

a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} e^x-x^2$.

On a $e^x-x^2=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}=+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} e^x-x^2=+\infty$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^3-x)$.

On a $e^x(x^3-x)=e^x \cdot x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot e^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^3-x)=0$.

c) Comportement au voisinage de 0

On a le résultat suivant : $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}=1$.

Démonstration

Posons $f(x) = e^x$. Cette fonction est dérivable en 0 et $f'(0)=\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. En tenant compte du fait que $f(x) = e^x$ et $f'(x) = e^x$ on obtient $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}=1$.

D. Equations différentielles $y'=ay$

Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y'=ay$ sur un intervalle I si f est dérivable sur I et si pour tout x de I : $f'(x) = a f(x)$.

1. Solutions de $y'=ay$

> Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions de la forme $f(x)=Ce^{ax}$ où C est une constante arbitraire.
> Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, il existe une solution unique f de $y' = ay$ qui vérifie $y_0 = f(x_0)$.

Démonstration
Si $f(x)=Ce^{ax}$, alors $f'(x)=Ce^{ax}\times a=aCe^{ax}=af(x)$. Il s'agit bien d'une solution.
Soit g une autre solution de $y' = ay$ et considérons la fonction h définie par $h(x)=g(x)e^{-ax}$.
On a $h'(x) = 0$, donc h est une fonction constante et $h(x) = C$. On en déduit que $g(x)=Ce^{ax}$ et donc que toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ ont cette forme.

Exemple
Déterminer la solution f de l'équation différentielle $2y' – 5y = 0$ telle que $f(2) = 1$.
Remarquons que $2y'-5y=0 \Leftrightarrow y'=\frac{5}{2}y$.
La fonction f, solution de $2y' – 5y = 0$, est donc de la forme $f(x)=Ce^{\frac{5}{2}x}$.
Comme $f(2) = 1$, $Ce^5 = 1$ et $C=\frac{1}{e^5}=e^{-5}$. On a donc $f(x)=e^{-5}e^{\frac{5}{2}x}=e^{\frac{5}{2}x-5}$.

2. Fonctions vérifiant $f(a+b)=f(a)\times f(b)$

> Si une fonction f, non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie, pour tous les réels a et b,
> $$f(a + b) = f(a) \times f(b),$$
> alors il existe un réel k tel que $f(x) = e^{kx}$ pour tout réel x.

Démonstration
a) Comme f n'est pas nulle il existe un réel a tel que $f(a) \neq 0$. On a alors :
$f(a) = f(a+0) = f(a)\times f(0)$, d'où $f(0) = 1$.
b) Soit a un réel et g la fonction définie par $g(x) = f(a + x) = f(a) \times f(x)$. On peut calculer la dérivée de g de deux façons :
- comme $g(x) = f(a + x)$, on a $g'(x) = f'(a + x)$
- comme $g(x) = f(a) \times f(x)$, on a $g'(x) = f(a) \times f'(x)$

Ainsi $f'(a + x) = f(a) \times f'(x)$. Pour $x = 0$, on obtient $f'(a) = f(a) \times f'(0)$.
En posant $f'(0) = k$, on obtient $f'(a) = k.f(a)$, quel que soit le réel a choisi. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ky$. On en déduit que $f(x) = Ce^{kx}$.
Mais comme $f(0)=1$, on a finalement $f(x) = e^{kx}$.