Equations différentielles

A. Equations du type y'=ay

Rappel : résoudre l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné), c'est déterminer l'ensemble des fonctions dérivables f qui vérifient $f'(x) = a f(x)$.

> Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante arbitraire.
>
> Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, il existe une solution unique de $y' = ay$ qui vérifie l'égalité $y_0 = f(x_0)$.

Démonstration

Si $f(x) = Ce^{ax}$, alors $f'(x) = Ce^{ax} \times a = aCe^{ax} = a f(x)$. Il s'agit bien d'une solution.
Soit g une solution quelconque de $y' = ay$. Considérons la fonction h définie par $h(x) = g(x)\, e^{-ax}$.
On a $h'(x) = 0$ donc h est une fonction constante et $h(x) = C$. On en déduit que $g(x) = Ce^{ax}$ et donc que g est de la même forme que f.

Si on impose $y_0 = f(x_0)$, alors $y_0 = C\, e^{ax_0}$, d'où $C = \frac{y_0}{e^{ax_0}}$. La solution est donc unique.

Exemple

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$ telle que $f(2) = 1$.

Remarquons que $2y' - 5y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{2} y$.

La fonction f, solution de $2y' - 5y = 0$, est donc de la forme $f(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$.

Comme $f(2) = 1$, $Ce^5 = 1$ et $C = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$. On a donc $f(x) = e^{-5} e^{\frac{5}{2}x} = e^{\frac{5}{2}x - 5}$.

B. Equations du type y' = ay+b

> Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels donnés avec $a \neq 0$) sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante arbitraire.
>
> Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, il existe une solution unique de $y' = ay + b$ qui vérifie l'égalité $y_0 = f(x_0)$.

Démonstration

La fonction g définie par $g(x) = \frac{-b}{a}$ est une solution particulière de $y' = ay + b$.
Soient f une solution quelconque de $y' = ay + b$ et h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$, donc $h(x) = f(x) + \frac{b}{a}$.

On a $h'(x) = f'(x) = a f(x) + b = a\left(f(x) + \frac{b}{a}\right) = a\, h(x)$.

La fonction h est donc solution de l'équation différentielle $z' = az$, elle est de la forme $h(x) = Ce^{ax}$.

Finalement, on a $f(x)+\frac{b}{a}=Ce^{ax}$, donc $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$.

Si on impose $y_0 = f(x_0)$, alors $y_0=C\,e^{ax_0}+\frac{b}{a}$, d'où $C=\frac{y_0-\frac{b}{a}}{e^{ax_0}}$. La solution est donc unique.

Exemple
Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = -5y + 2$ telle que $f(0) = 1$.
La fonction f, solution de $y' = -5y + 2$, est donc de la forme $f(x)=Ce^{-5x}-\frac{2}{-5}=Ce^{-5x}+\frac{2}{5}$.
Comme $f(0) = 1$, $C+\frac{2}{5}=1$ et $C=\frac{3}{5}$. On a donc $f(x)=\frac{3}{5}e^{-5x}+\frac{2}{5}$.

C. Exemples de résolution d'autres équations différentielles

Exemple 1
On se propose de résoudre l'équation différentielle $y' = y + x^2$.
1- Rechercher une solution particulière $g(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré.
Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$. On a $g'(x) = 2ax + b$. Comme g est solution de $y' = y + x^2$, on a :
$2ax + b = ax^2 + bx + c + x^2 = (a + 1)x^2 + bx + c$.
Par identification, on en déduit que a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} a+1=0 \\ 2a=b \\ b=c \end{cases}$. Ceci nous donne $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$. Ainsi $g(x) = -x^2 - 2x - 2$ est solution de $y' = y + x^2$.

2- Soit f une solution quelconque de $y' = y + x^2$. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que h est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
On a $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f(x) + x^2 - (g(x) + x^2) = f(x) - g(x) = h(x)$. h est donc bien solution de l'équation différentielle $y' = y$.

3- En déduire $h(x)$, puis $f(x)$.
Comme h est solution de l'équation différentielle $y' = y$, h est de la forme $h(x) = Ce^x$, où C est une constante arbitraire.
Puisque $h(x) = f(x) - g(x)$, on a $f(x) = h(x) + g(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$.

Conclusion : les solutions de l'équation différentielle $y' = y + x^2$, sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$, où C est une constante arbitraire.

Exemple 2
Déterminer les solutions strictement positives de l'équation différentielle $y' = y(5 - y)$.
1- Soit f une solution de $y' = y(5 - y)$. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = -5y + 1$.
Comme $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, on a $g'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$. Comme f est solution de $y' = y(5 - y)$, on a
$f'(x)=f(x)(5-f(x))$, d'où $g'(x) = \frac{f(x)(f(x)-5)}{f(x)^2}=\frac{f(x)-5}{f(x)}=1-\frac{5}{f(x)}=1-5g(x)$.
g est donc solution de l'équation différentielle $y' = -5y + 1$.

2- En déduire $g(x)$, puis $f(x)$.

Les solutions de $y' = -5y + 1$ sont les fonctions g de la forme $g(x) = Ce^{-5x} + \frac{1}{5}$ où C est une constante arbitraire.

Comme $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, on a $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{Ce^{-5x} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{5Ce^{-5x} + 1}$.