Fonctions dérivables

A. Nombre dérivé en un point

1- Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f est dérivable en a lorsque le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (taux d'accroissement) a une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est alors notée $f'(a)$, c'est le nombre dérivé de f en a.

On peut donc écrire $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

En effectuant le changement de variable $x = a + h$, cette formule est équivalente à

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exemple

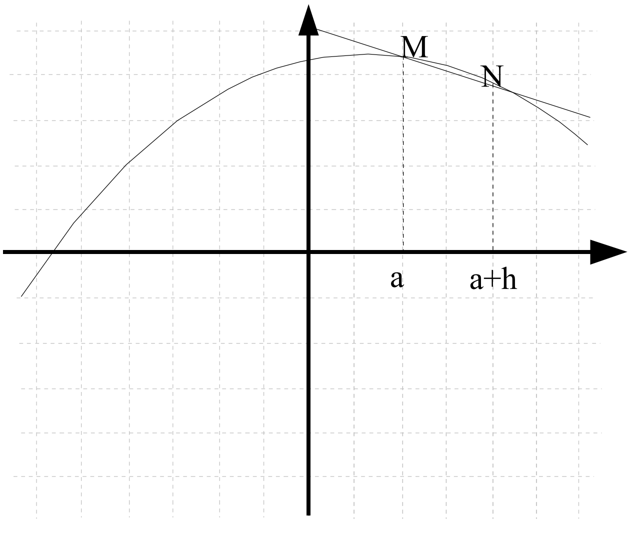
On considère la fonction carré et on cherche son nombre dérivé en 1.

Commençons par calculer le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $f(x) = x^2$ et $a = 1$.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$. Lorsque h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2.

Pour la fonction carré, le nombre dérivé en 1 est égal à 2.

2- Interprétation graphique



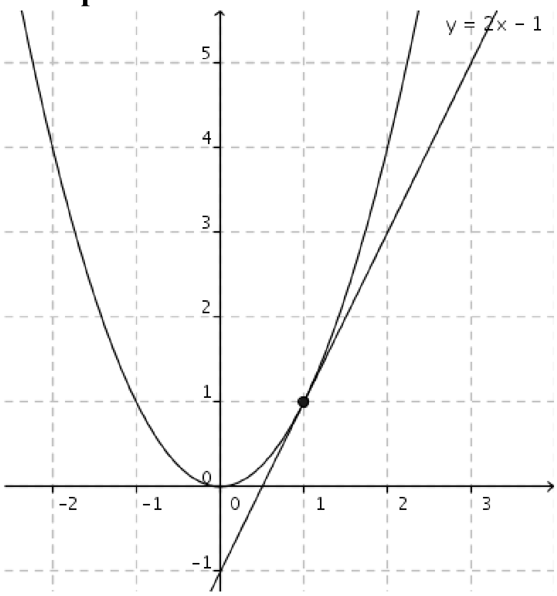
M et N sont les points d'abscisses a et $a+h$ de la courbe représentative d'une fonction f.
Les coordonnées de M sont $(a, f(a))$.
Les coordonnées de N sont $(a+h, f(a+h))$.
Le coefficient directeur de la droite (MN) est donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Lorsque h tend vers 0, le point N se rapproche du point M et la droite (MN) se rapproche de la tangente à la courbe en a.
Le coefficient directeur de cette tangente est donc $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, c'est à dire le nombre $f'(a)$.

Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, sa courbe représentative admet en a une tangente non verticale dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

L'équation de la tangente est donc $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

On retrouve facilement l'équation de la tangente en remarquant que c'est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ qui passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Exemple



Cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction carrée au point d'abscisse 1.
L'équation de la tangente est
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$,
avec ici $f(x) = x^2$ et $a = 1$.
Nous avons vu que le nombre dérivé de la fonction carrée en 1 est égal à 2, ce qui donne $f'(1) = 2$.
L'équation de la tangente est donc $y = 2(x - 1) + 1^2$, soit $y = 2x - 1$.

On peut noter qu'au voisinage de 1, courbe et tangente sont pratiquement confondues.

3- Approximation affine

f étant une fonction dérivable en a, posons $\varphi(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$ pour $h\neq 0$.

On a d'une part $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$, et d'autre part $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varphi(h)$.
Pour h petit, la partie $h\varphi(h)$ est négligeable et $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$, on obtient une approximation affine de $f(a+h)$.

> Lorsqu'une fonction f est dérivable en a, la formule $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ en donne une approximation affine, d'autant plus précise que h est petit.

Exemple
Cherchons une approximation affine de $(1 + h)^2$.
On considère la fonction carré dont le nombre dérivé en 1 est égal à 2.
La formule $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ devient $(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$.

4- Fonction dérivée et sens de variation

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout réel a de I.
On note f' la fonction qui à x associe $f'(x)$ et on l'appelle fonction dérivée de f.

Propriété

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
> Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
> Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

On peut expliquer cette propriété de la façon suivante : au voisinage du point $(a, f(a))$ la courbe représentative de f est pratiquement confondue avec sa tangente qui est la représentation graphique d'une fonction affine de coefficient directeur $f'(a)$. Fonction et approximation affine varient donc dans le même sens. Or une fonction affine est croissante lorsque son coefficient directeur est positif et décroissante lorsqu'il est négatif. Cela confirme que *f* est croissante lorsque *f* '(*a*) est positif et décroissante lorsque *f* '(*a*) est négatif.

5- Ecriture différentielle

On appelle taux d'accroissement de la fonction *f* en *a* le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Si *f* est dérivable en *a*, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

En posant $\Delta f=f(x)-f(a)$ et $\Delta x=x-a$, le taux d'accoissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'écrit $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Sa limite quand *x* tend vers *a*, donc le nombre dérivé en *a*, peut se noter $f'(a)=\left(\frac{df}{dx}\right)_a$; la fonction dérivée se note $f'=\frac{df}{dx}$ c'est l'écriture différentielle.

B. Calculs de dérivées

Pour calculer la dérivée *f* ' d'une fonction dérivable *f*, on utilise un tableau des dérivées usuelles et des règles de dérivation sur les opérations.

1- Tableau des dérivées usuelles

fonction	***dérivée***	***intervalle***
constante *k*	0	$\mathbb{R}$
fonction affine *ax*+*b*	*a*	$\mathbb{R}$
fonction puissance x^n , *n* entier supérieur ou égal à 2	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
fonction inverse $\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
fonction racine carrée $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

2- Opérations et composition

Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*.
Pour tout réel *k*, la fonction *ku* est dérivable sur *I* et (*ku*)' = *ku*'.
La fonction *u*+*v* est dérivable sur *I* et (*u*+*v*)' = *u*'+*v*'.
La fonction *uv* est dérivable sur *I* et (*uv*)' = *u*'*v* + *v*'*u*.
Si *v* ne s'annule pas sur *I*, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur *I* et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Si *f* est dérivable sur un intervalle *J* contenant toutes les valeurs de *u*(*x*) quand $x\in I$, alors la fonction $f\circ u$ est dérivable sur *I* et $(f\circ u)'=f'\circ u\times u'$.
D'où : $[f(u(x))]'=f'(u(x))\times u'(x)$

Applications

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

• la fonction u^n est dérivable sur I et
$(u^n)'=n\,u^{n-1}\times u'=n\,u'u^{n-1}$

• si u ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et
$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-1}{u^2}\times u'=\frac{-u'}{u^2}$

• si u est strictement positive sur I, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Démonstration

Soit x_0 un réel de I. Le nombre dérivé de $f\circ u$ en x_0 est $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{x-x_0}$.

Or $\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}\times\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)$. D'autre part, on pose $X=u(x)$ et $X_0=u(x_0)$ et on a $\lim\limits_{x\to x_0}X=\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)=X_0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}=\lim\limits_{X\to X_0}\frac{f(X)-f(X_0)}{X-X_0}=f'(X_0)=f'(u(x_0))$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{x-x_0}=f'(u(x_0))\times u'(x_0)$.

Remarque

On retrouve facilement ce résultat avec l'écriture différentielle. En posant : $g=f\circ u$
$\frac{dg}{dx}=\frac{dg}{du}\times\frac{du}{dx}$.

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.
La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 + x^2$, c'est la composée de la fonction racine carrée et de la fonction u.
Comme $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times u'$.Donc $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.