Dénombrements et loi binomiale

A. Listes d'éléments d'un ensemble fini

Soit E un ensemble de n éléments.
On appelle liste une suite ordonnée d'éléments de E.
Par exemple, si E = {1; 2; 3; 4}, on peut construire les listes suivantes :
(1; 1; 4; 2) ou (4, 3, 1) ou (1, 3, 4).
Les listes (4, 3, 1) et (1, 3, 4) sont distinctes bien qu'elles soient formées avec les mêmes éléments.

1- Permutations et factorielles

> On appelle permutation d'un ensemble E de n éléments toute liste de n éléments de E deux à deux distincts.

Exemple
Si E = {a, b, c}, on a six permutaions possibles :
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

> Le nombre de permutations de d'un ensemble de n éléments est $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!$.
> $n!$ se lit « factorielle n ».
> On pose $0!=1$.

Démonstration
On a n choix possibles pour le premier terme, n-1 choix possibles pour le second, ... , et 1 choix possible pour le dermier. Cela donne bien $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!$ façons de réaliser une permutation.

Exemple
Le nombre de permutations d'un ensemble de 3 éléments est $3!=3\times 2\times 1=6$.

2- Listes de p éléments deux à deux distincts

> Le nombre de listes de p éléments deux à deux distincts d'un ensemble E de n ($n \geq p$) éléments est $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration
On reprend le raisonnement utiliser pour les permutations en s'arrêtant après avoir choisi p termes.

Exemple
Le nombre de mots de trois lettres deux à deux distinctes est
$$\frac{26!}{(26-3)!}=\frac{26!}{23!}=\frac{26\times 25\times\cdots\times 2\times 1}{23\times 22\times\cdots\times 2\times 1}=26\times 25\times 24=15600\,.$$

Remarque
Le nombre de liste de p éléments (avec répétition possible) d'un ensemble E de n éléments est n^p.
Le nombre de mots de trois lettres (avec répétition possible) est 26^3 = 17576.

B. Combinaisons

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier inférieur ou égal à n. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

Exemple

Si E = {1; 2; 3; 4}, on peut construire les combinaisons suivantes : ∅, {1; 4; 2) ou {4; 3}.

Remarque

{2; 3} et {3; 2} sont une seule combinaison, l'ordre des termes n'intervient pas.

1- Dénombrement des combinaisons

> Le nombre de combinaisons de *p* éléments dans un ensemble E de *n* (*n* ≥ *p*) éléments est $\binom{n}{p}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration

C'est le nombre de listes de *p* éléments deux à deux distincts divisé par le nombre de permutations de *p* éléments car chaque combinaison est représentée par *p*! listes.

Exemples

1- Au Loto, le nombre de tirages de 6 numéros parmi 49 est

$\binom{49}{6}=\frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=13983816$.

De façon plus générale, il y a $\binom{n}{p}$ tirages possibles de p boules parmi n boules, ces tirages étant sans remise.

2- On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité *p* d'obtenir exactement 2 as ?

On suppose les tirages équiprobables, on obtient la probabilité *p* en divisant le nombre de cas favorables (tirages contenant exactement 2 as) par le nombre de cas possibles (nombre total de tirage de 5 cartes).

Un tirage est une combinaison de 5 cartes parmi les 32; le nombre de tirages possibles est donc $\binom{32}{5}=201376$.

Un cas favorable est obtenu en prenant 2 cartes parmi les 4 as, et 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as; le nombre de cas favorables est donc $\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}=6\times3276=19656$.

Ainsi $p=\frac{19656}{201376}=\frac{351}{3596}\approx0{,}0976$.

2- Propriétés

> Quels que soient les entiers *n* et *p* tels que 0 ⩽ *p* ⩽ *n*, on a : $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

Démonstration

A chaque combinaison de *p* éléments correspond une et une seule combinaison de *n-p* éléments, celle qu'on obtient en prenant les éléments qui ne sont pas dans la première combinaison. Le nombre de combinaisons de *p* éléments est donc égal au nombre de combinaisons de *n-p* éléments.

Quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$-1, on a : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$.

C'est la relation de Pascal.

Démonstration

Soit a un élément de E; il y a $\binom{n-1}{p}$ combinaisons de p éléments qui ne contiennent pas a et $\binom{n-1}{p-1}$ combinaisons de p éléments qui contiennent a; cela donne bien $\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$ combinaisons de p éléments.

Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de retrouver les $\binom{n}{p}$ à partir du triangle de Pascal.

	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On peut lire : $\binom{5}{0}=1$, $\binom{5}{1}=5$, $\binom{5}{2}=10$, $\binom{5}{3}=10$, $\binom{5}{4}=5$, $\binom{5}{5}=1$.

Pour construire le triangle de Pascal on remplit la première colonne et la diagonale avec des 1. Cela correspond aux égalités $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$. Ensuite le contenu de chaque case est égal à la somme du terme de la même colonne et du précédent dans la ligne précédente. Cela correspond à l'application de la relation de Pascal $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$.

3- Formule du binôme

Soient a et b deux nombres complexes et n un entier supérieur ou égal à 1. On a :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n-1}a\,b^{n-1}+b^n .$$

Démonstration

$(a + b)^n$ est le produit de n facteurs égaux à $(a + b)$.
Pour développer ce produit on écrit la somme de tous les produits possibles obtenus en choisissant comme facteur a ou b dans les différentes sommes $(a + b)$. Cela donne donc des termes de la forme $a\times b\times a\times a\times\ldots\times b$ de n facteurs. Ces termes ont donc la forme $a^{n-p}\times b^p$ si l'on a choisi p fois le terme b et n-p fois le terme a. Or le nombre de choix de ce type est $\binom{n}{p}$, on a donc bien pour $(a + b)^n$ la somme de tous les termes du type $\binom{n}{p}$ $a^{n-p}\times b^p$ pour p allant de 0 à n.

(on peut aussi faire une démonstration par récurrence)

Exemple
En utilisant le triangle de Pascal précédent, on trouve $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$.

C. Loi binomiale

1- Epreuve de Bernoulli

> Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues appelées succès ou échec de probabilités respectives p et $1-p$.
> Soit X la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on a
> $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$

2- Schéma de Bernoulli et loi binomiale

> Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité de succès est p.
> Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de succès. X prend comme valeurs les entiers naturels k allant de 0 à n. On a : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
> La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $B(n,p)$.

Démonstration
Chaque liste de résultats représentant l'évènement $X=k$ est formée de k succès et n-k échecs. La probabilité d'une telle liste est donc $p^k(1-p)^{n-k}$. Le nombre de ces listes est le nombre de combinaisons de k éléments dans un ensemble de n éléments, c'est donc $\binom{n}{k}$. D'où la formule
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarque
La formule du binôme nous donne $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. En posant $a = p$ et $b = 1-p$ on obtient $1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)$. La somme des probabilités de toutes les éventualités est bien égale à 1.

Propriétés

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
> $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) = np$ et $V(X) = \sum_{k=0}^{n} (k - E(X))^2 P(X=k) = np(1-p)$.

Exemple
Un QCM est formé de 10 questions pour lesquelles 5 réponses (dont une seule est la bonne) sont proposées. Un élève répond au hasard aux 10 questions. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses.
X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,2 car on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité de succès est 0,2.

La probabilité d'obtenir 5 bonnes réponses est $\binom{10}{5} 0,2^5 \times 0,8^5 \approx 0,026$.

L'espérance mathématique de X est $E(\mathrm{X})=10 \times 0,2 = 2$.