Fonctions continues

A Définition

Une fonction *f* est continue en un réel *a* si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Une fonction *f* est continue sur un intervalle *I* si elle est continue en tout réel de *I*.

Intuitivement, on reconnaît qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon.

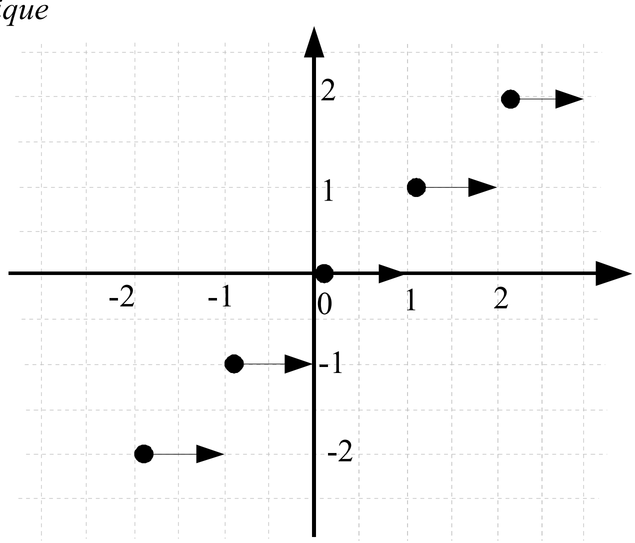
1- Continuité des fonctions usuelles

Les fonctions polynômes, inverse, racine carrée, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

Les fonctions obtenues par opérations ou composition à partir de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

2- Un contre exemple

La fonction « partie entière » est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel *x* associe l'unique entier relatif *n* tel que $n \leqslant x < n+1$. On note cette fonction *E*.
On a *E*(3,8) = 3; *E*(-2,5)=-3; ....
Cherchons $\lim_{x \to 1^-} E(x)$. Lorsque $0<x<1$, $E(x)=0$, donc $\lim_{x \to 1^-} E(x) = 0$.
Cherchons $\lim_{x \to 1^+} E(x)$. Lorsque $1<x<2$, $E(x)=1$, donc $\lim_{x \to 1^+} E(x) = 1$.
Il n'y a pas de limite en 1, la fonction *E* n'est donc pas continue en 1.
Représentation graphique



3- Continuité et dérivabilité

Une fonction qui est dérivable en un réel *a* est continue en *a*.

Démonstration

On a $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \times (x-a)$. Comme $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim_{x \to a} x-a = 0$, on a $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$, donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Attention
La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

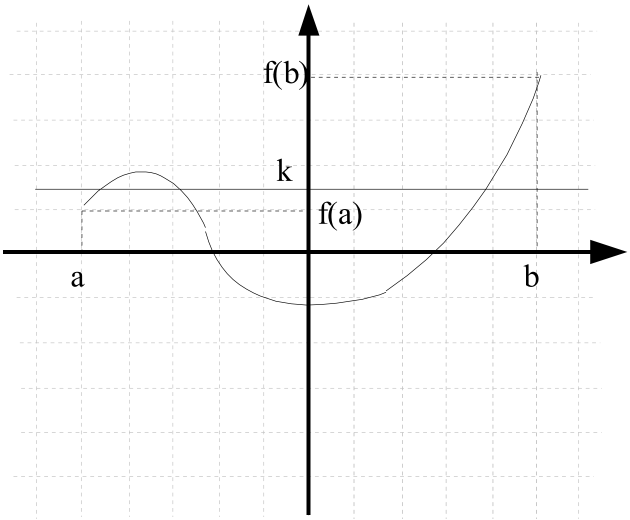
B Théorème des valeurs intermédiaires

1- Cas général

> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*.
> Si *a* et *b* sont deux réels de *I* et si *k* est un réel compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), alors il existe au moins un réel *x* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*x*) = *k*.

(ce théorème est provisoirement admis)

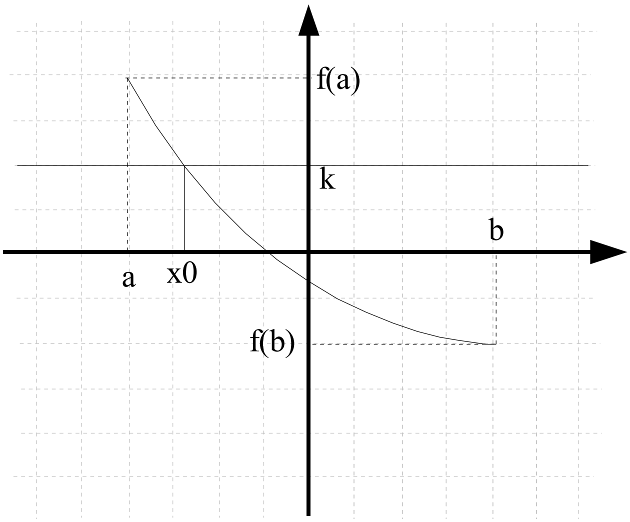
Interprétation graphique



Soit *C* la courbe représentative de la fonction *f* continue sur [*a* ; *b*] et soit *k* un réel compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*).
Comme la fonction *f* est continue, la courbe *C* traverse la droite *D* d'équation *y*=*k* en au moins un point.
L'équation *f*(*x*) = *k* a donc au moins une solution dans l'intervalle [*a* ; *b*].
Attention : cette solution n'est pas forcément unique.

2- Cas des fonctions continues strictement monotones

> Si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur [*a* ; *b*], alors pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'équation *f*(*x*) = *k* admet une solution unique dans [*a* ; *b*].



Démonstration
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel x_0 tel que $f(x_0) = k$.
Soit x_1 un autre réel de [*a* ; *b*]; celui-ci est strictement supérieur ou inférieur à x_0, et comme *f* est strictement monotone $f(x_1)$ est strictement supérieur ou inférieur à $f(x_0)$, donc à *k*. $f(x_1)$ ne peut donc pas être égal à *k*, il n'y a donc pas d'autres solutions de l'équation *f* (*x*) = *k* dans l'intervalle [*a* ; *b*].

Une application
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $[a ; b]$.

Exemple
Montrer que l'équation $x^3+x-3=0$ a une solution unique α située entre 1 et 2.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+x-3$. Il s'agit d'une fonction continue. D'autre part, on a $g'(x)=3x^2+1$. Comme pour tout réel x on a $g'(x)>0$, la fonction g est strictement croissante (donc monotone) sur $\mathbb{R}$.
Enfin $g(1)=-1$ et $g(2)=7$.
Si $x\leqslant 1$, alors $g(x)\leqslant -1$ et x ne peut pas être solution de $g(x)=0$.
Si $x\geqslant 2$, alors $g(x)\geqslant 7$ et x ne peut pas être solution de $g(x)=0$.
Par contre, comme g est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$, et comme $g(1)$ et $g(2)$ ont des signes opposés, il existe un unique réel α situé entre 1 et 2 tel que $g(x)=0$.