Nombres complexes (2)

A. Module et argument d'un nombre complexe.

1- Coordonnées polaires

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Le point *M*, autre que *O*, a pour coordonnées polaires (r, α), signifie que :
• $r = OM$
• α est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
On a les trois relations suivantes : $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cdot\cos(\alpha)$ et $y=r\cdot\sin(\alpha)$.

2- Application aux nombres complexes

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, M le point d'affixe z.
Si le point M a pour coordonnées polaires (r, α), alors nous dirons que :
• r est le module de z, on note $r = |z|$.
• α est un argument de z, on note $\alpha = \arg(z)$ (α est défini à 2π près).

On en déduit que $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos(\alpha)=\dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{|z|}$.

Remarques

- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $|\bar{z}|=|z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.
- z réel non nul équivaut à $\arg(z) = 0$ ou $\arg(z) = \pi$.
- z imaginaire pur non nul équivaut à $\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{2}$.

3- Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Soit z un nombre complexe non nul.
Si $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$, alors $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.
Si $r>0$ et $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, alors $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$.
La forme $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ (avec r positif) est appelée forme trigonométrique de z.

Exemples :

a) Forme trigonométrique de $z_1=-1+i\sqrt{3}$.
On a $|z_1|=\sqrt{1+3}=2$. D'où $z_1=2(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$.
b) Forme trigonométrique de $z_2=2+i$.
On a $|z_2|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$. D'où $z_2=\sqrt{5}(\dfrac{2}{\sqrt{5}}+i\dfrac{1}{\sqrt{5}})$; ceci est la forme trigonométrique, il existe un réel α tel que $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ mais il n'a pas une forme simple, $\alpha\approx 0{,}46$.

B. Module, argument et opérations

1- Inégalité triangulaire

> Quels que soient les complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

2- Produit

> Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :
> $|zz'|=|z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

Démonstration :
Soient $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$.
$zz' = rr'(\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' + i (\cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha')) = rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i \sin(\alpha+\alpha'))$.
D'où, $|zz'| = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \alpha+\alpha' = \arg(z) + \arg(z')$.

> Pour tout entier naturel non nul n, $|z^n|=|z|^n$ et $\arg (z^n) = n \arg (z)$.
> En particulier, on a la formule de Moivre : $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

3- Quotient

> Pour tous nombres complexes non nuls z et z' : $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg (z) - \arg (z')$.

Démonstration :
Comme $z'\frac{1}{z'}=1$, on a $|z'|\left|\frac{1}{z'}\right|=1$ d'où $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$,
et $\arg (z') + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = 0$ d'où $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = - \arg (z')$.

4- Lien avec le plan complexe

> Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
> Si A et B sont des points distincts d'affixes a et b, alors $AB = |b-a|$, et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})=\arg(b-a)$.
> Si A, B, C et D sont 4 points d'affixes a, b, c et d, avec $a \neq b$ et $c \neq d$
> alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.

Démonstration
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB}, \vec{u})+(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = -\arg(b - a) + \arg(d - c)=\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.

C. Notation exponentielle

> Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

1- Exemples

- $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ (c'est la formule d'Euler, souvent considérée comme la plus belle formule des mathématiques)

- $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
- $e^{2i\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2- Propriétés

> Pour tous les réels θ et θ', et tout entier naturel non nul n :
> - $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
> - $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

(on retrouve les règles usuelles de calcul avec les exponentielles)
Si z est un nombre complexe non nul, l'écriture $z = re^{i\theta}$ avec r=|z| et θ = arg(z) est appelée forme exponentielle de z.

D. Nombres complexes et transformations

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit F une transformation du plan complexe. On lui associe la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un complexe z affixe de M associe f(z)=z' affixe du point M'=F(M).
z'=f(z) est l'écriture complexe de la transformation F.

1- Translations

La translation de vecteur $\vec{w}$ transforme un point M en un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$.
Si $\vec{w}$ est le vecteur d'affixe a, son écriture complexe est $z' = z + a$.

2- Homothéties

L'homothétie de centre Ω et de rapport k transforme le point M en le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
Si ω est l'affixe de Ω, son écriture complexe est $z' - \omega = k(z - \omega)$.
Si Ω = O (origine du repère), on obtient $z' = kz$.

3- Symétries

- La symétrie centrale de centre Ω d'affixe ω a pour écriture complexe $z' - \omega = -(z - \omega)$, c'est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.
- La symétrie axiale d'axe $(O, \vec{u})$ a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.
- La symétrie axiale d'axe $(O, \vec{v})$ a pour écriture complexe $z' = -\bar{z}$.

4- Rotations

La rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
Si Ω = O (origine du repère), on obtient $z' = ze^{i\theta}$.