Nombres complexes (1)

A. Définitions

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a et b réels.

1- Vocabulaire

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes
- La forme $z = a + ib$ (où a et b sont réels) est la forme algébrique de z.
  Le réel a est la partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$;
  Le réel b est la partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$
- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est un réel.
  Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, alors z est un imaginaire pur.

2- Egalité de deux nombres complexes

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Donc, pour a, b, a' et b' réels, $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.
En particulier, $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.

B. Opérations

1- Somme et différence

On considère deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
Alors :

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i\,(b + b')$.
- $z - z' = (a + ib) - (a' + ib') = a + ib - a' - ib' = (a - a') + i\,(b - b')$.
- L'opposé de z est $-z = -a - ib$.

2- Produit et quotient

On considère deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
Alors :

- $z\,z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iba' + iab' + i^2bb' = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)$.
- Si $z \neq 0$, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.
  On a multiplié numérateur et dénominateur par le complexe $a - ib$ qu'on appelle le conjugué de $a + ib$.
- Si z et z' sont deux complexes avec $z' \neq 0$, alors $\dfrac{z}{z'}=z\cdot\dfrac{1}{z'}$.

Exemple

Mettre sous la forme $a + ib$ (avec a et b réels) le complexe $\frac{1+i}{3-4i}$.

$$\frac{1+i}{3-4i}=\frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+3i-4}{3^2+4^2}=\frac{-1}{25}+i\frac{7}{25}.$$

C. Conjugaison

Soit z un nombre complexe; $z = a + ib$ avec a et b réels.
On appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.

Ainsi les conjugués de 5 - 3i, 7 et 2i sont respectivement 5 + 3i, 7 et -2i.

1- Propriétés immédiates

- z réel équivaut à $z=\bar{z}$
- z imaginaire pur équivaut à $z=-\bar{z}$
- si $z = a + ib$, alors $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$.

2- Effet de la conjugaison sur les opérations

Pour tous les nombres complexes z et z' et pour tout entier n :

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$; $\overline{(-z)}=-\bar{z}$; $\overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\overline{z'}$; $\overline{z^n}=\bar{z}^n$

si de plus $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

L'opération de conjugaison est compatible avec l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'élévation à une puissance.

D. Equation du second degré à coefficients réels

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à résoudre dans $\mathbb{C}$ avec a, b et c réels et a non nul.
On appelle discriminant de cette équation le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Rappel : $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux racines réelles $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une racine réelle double $z_0=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation a deux racines complexes conjuguées $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

E. Interprétation géométrique des nombres complexes

Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, il est possible d'établir une correspondance entre points du plan et nombres complexes.

- Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le point $M(x , y)$ est l'image de z (ou le point associé à z); il est noté $M(z)$.
- Soit $M(x , y)$ un point. Le complexe $z = x + iy$ est appelé **affixe** de M; il est noté z_M.

On définit aussi l'affixe d'un vecteur $\vec{w}(x , y)$ par $z_{\vec{w}}=x+iy$.

1- Propriétés immédiates

Pour tout point A, $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A$.

- Quels que soient les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ et quel que soit le réel k, $z_{\vec{w}+\overrightarrow{w'}}=z_{\vec{w}}+z_{\overrightarrow{w'}}$; $z_{k\vec{w}}=kz_{\vec{w}}$.
- Quels que soient les points A et B, $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$.
- L'affixe du point G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ est $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$. En particulier, I milieu de $[AB]$ équivaut à $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
- La translation de vecteur $\vec{w}$ transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z'=z+z_{\vec{w}}$.
- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
  Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine.

2- Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ (avec x et y réels) un nombre complexe.

On appelle module de z le réel $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés

Quels que soient les complexes z et z' :

- $|z|^2=z\bar{z}$
- $|zz'|=|z||z'|$
- si $z' \neq 0$, alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
- pour tout entier naturel n, $|z^n|=|z|^n$

Démonstrations

Si $z = x + iy$, $|z|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$ et $z\bar{z}=(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$. On a donc bien $|z|^2=z\bar{z}$.

En utilisant cette propriété : $|zz'|^2=zz'\overline{zz'}=zz'\bar{z}\overline{z'}=z\bar{z}z'\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$, d'où $|zz'|=|z||z'|$.

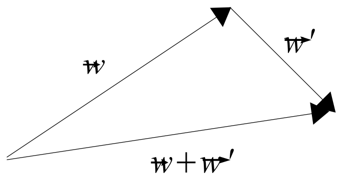
Si $z' \neq 0$, on a $z=\dfrac{z}{z'}\times z'$, donc $|z|=\left|\dfrac{z}{z'}\right||z'|$, ce qui donne $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.

Interprétation géométrique

Si z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$, alors $|z|=\|\vec{w}\|$.

En particulier, quels que soient les points A et B, $AB=|z_{\overrightarrow{AB}}|=|z_B-z_A|$.

Remarque



D'après l'inégalité triangulaire :
$\|\vec{w}+\overrightarrow{w'}\| \leq \|\vec{w}\|+\|\overrightarrow{w'}\|$, on en déduit, si z est l'affixe de $\vec{w}$ et si z' est l'affixe de $\overrightarrow{w'}$, que :
$| z + z' | \leqslant | z | + |z'|$.

Application aux cercles

> Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points du plan tels que $\Omega M = r$.

En utilisant les nombres complexes, cette définition devient :

> Le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $| z - \omega | = r$.

En utilisant les coordonnées, on obtient une équation du cercle :

> Le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$du plan tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.