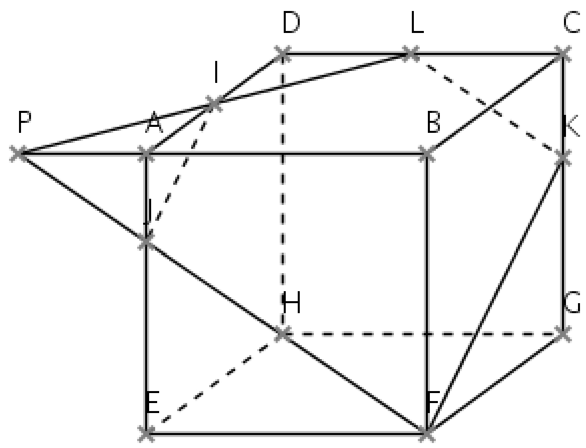
Devoir de Mathématiques

Exercice 1



1) Reproduire le cube ABCDEFGH représenté sur la figure. Ajouter le point I milieu de [AD] et le point J de [AE] vérifiant $AJ = \frac{AE}{3}$.

Voir figure ci-dessus.

2) Déterminer l'intersection du plan (FIJ) avec les faces ABFE et ADHE.

(FIJ) coupe la face ABFE suivant le segment [JF] et la face ADHE suivant le segment [IJ].

3) Construire le point K de [CG] tel que [FK] soit l'intersection du plan (FIJ) avec la face BCGF. Quelle est la propriété utilisée pour construire K ?

Comme les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles, le plan (FIJ) va les couper suivant des droites parallèles. (ADH) est coupé suivant la droite (IJ), (BCG) sera donc coupé suivant une droite parallèle à (IJ) passant par F. On a ainsi (FK) // (IJ), ce qui permet de tracer K.

4) Construire le point L intersection du plan (FIJ) avec l'arête [DC]. Justifier la construction.

Comme les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles, le plan (FIJ) va les couper suivant des droites parallèles. (ABF) est coupé suivant la droite (JF), (DCG) sera donc coupé suivant une droite parallèle à (JF) passant par K. On a ainsi (KL) // (FJ), ce qui permet de tracer L.

5) Quelle est l'intersection du plan (FIJ) avec le cube ABCDEFGH ? La représenter en couleur.

L'intersection du plan (FIJ) avec le cube ABCDEFGH est le polygone IJFKL.

6) Les droites (IL) et (JF) sont sécantes en un point P. Démontrer que les points A, B et P sont alignés.

Comme le point P se trouve à la fois dans le plan (ABC) et dans le plan (ABF), il se trouve sur l'intersection de ces deux plans qui est la droite (AB). P étant sur (AB), les points A, B et P sont alignés.

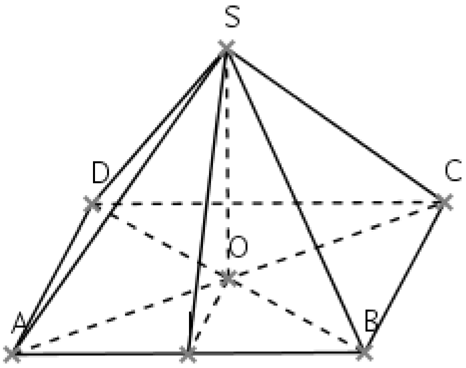
7) Quelle est la longueur du segment [PA] si l'arête du cube ABCDEFGH mesure 6cm ?

Dans le triangle PBF, on a (AJ) // (BF) et on peut appliquer le th. de Thalès et on obtient $\frac{PA}{PB} = \frac{AJ}{BF} = 1/3$. On a donc PB = 3.PA et on en déduit que PA = 3cm.

Exercice 2

SABCD est une pyramide régulière à base carrée; ABCD est un carré de centre O, les triangles SAB, SBC, SCD et SDA sont équilatéraux.

1) Représenter cette pyramide en perspective cavalière.



2) Le côté du carré ABCD mesure 6cm. Déterminer AC, SA et SC. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle SAC ?

SA et SC sont les côtés de triangles équilatéraux de côté 6, donc SA = SC = 6.

AC est la diagonale d'un carré de côté 6, donc $AC = 6\sqrt{2}$.

Comme SA = SC, le triangle SAC est isocèle en C.

Comme $AC^2 = 72$ et $SA^2 + SC^2 = 36 + 36 = 72$, on a $AC^2 = SA^2 + SC^2$. Le triangle SAC est donc un triangle rectangle et isocèle en S.

3) Démontrer que la droite (SO) est perpendiculaire au plan (ABC), puis calculer SO et le volume de la pyramide.

SAC est isocèle en S et O est milieu de [AC], on a donc (SO) $\perp$ (AC). De même, en considérant le triangle SBD on a (SO) $\perp$ (BD). Comme la droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABC), elle est perpendiculaire au plan (ABC).

SO est la hauteur du triangle rectangle isocèle SAC, on a donc

$SO = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Le volume de la pyramide est égal à $\frac{6 \times 6 \times 3\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2} \approx 50,9$

4) On appelle I le milieu de [AB]. Que peut-on dire du triangle SOI ? Déterminer les longueurs des 3 côtés de SOI, puis une mesure de l'angle SIO à 1° près.

Comme (SO) est perpendiculaire au plan (ABC), (SO) est orthogonale à toutes les droites de (ABC) et donc (SO) $\perp$ (OI). Le triangle SOI est donc rectangle en O.

On sait déjà que $SO = 3\sqrt{2}$. Comme I est milieu de [AB] et O est milieu de [AC], on a OI = BC/2, donc OI = 3.

SI est la hauteur du triangle équilatéral SAB, on a donc $SI = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Pour trouver une mesure de l'angle SIO on cherche son cosinus qui est égal à $\frac{IO}{IS} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On en déduit que l'angle SIO mesure environ 55°.